

Туманов М.П. Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления: Учебное пособие. – МГИЭМ. М., 2005, 82 с.

Теория Управления.

• Лекция 1. Введение.

Предметом изучения являются системы автоматического управления (далее САУ).

Примеры: терморегулятор, системы поддержания технологических параметров, электромеханические системы регулирования скорости и угла поворота, автоматическая подстройка частоты гетеродина приёмника, регулирование в рыночной экономике, и т.д.

- ❖ Теория автоматического управления (далее ТАУ) это наука, которая изучает процессы управления и проектирования автоматических систем, работающих по замкнутому циклу. Иначе говоря, она изучает любые системы с обратной связью. Будем также пользоваться термином ТУ (Теория управления)

Принято считать, что одним из первых примеров САУ является регулятор Ползунова-Уатта (1764-65г.г.), предназначенный для автоматического регулирования поддержания давления в паровом котле. На рис.1.1 обозначено:

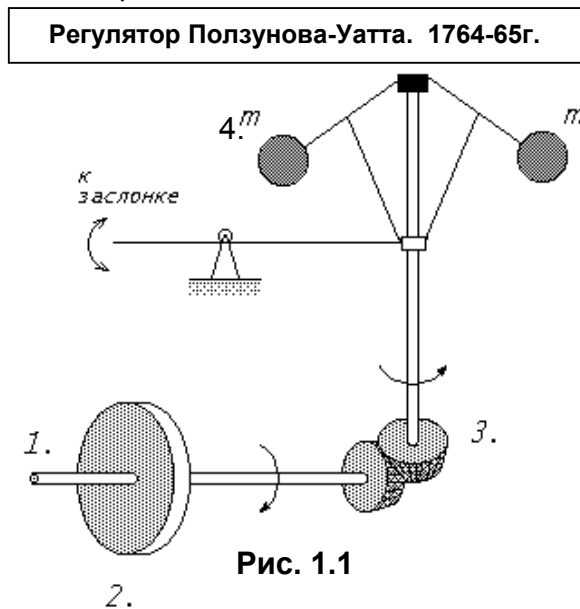
1. Вал паровой машины
2. Маховик
3. Зубчатая передача
4. Шары, непосредственно управляющие заслонкой.

Задача сводится к поддержанию постоянной скорости вращения.

С принципами работы этого регулятора связана работа И.А. Вышнеградского "Регуляторы прямого действия" (1876 г.), основными тезисами которой являются:

- Увеличение массы шаров вредно влияет на устойчивость.
- Уменьшение трения вредно влияет на устойчивость.
- Уменьшение момента инерции маховика вредно влияет на устойчивость.
- Уменьшение неравномерности хода (в зависимости от нагрузки) вредно влияет на устойчивость.

Все эти выводы противоречат инженерному "здоровому смыслу".



Развитие техники: повышение мощности машин, совершенствование обработки металла, увеличения рабочей скорости, стремление уменьшить неравномерность хода, - приводило к ухудшению работы парового регулятора. Вышнеградский в своей работе объяснил, почему улучшение параметров машины ухудшает её работу. Инженерам в то время это было совершенно неясно и никак не укладывалось в стандартные схемы.

В 1892 г. А.М. Ляпунов написал работу “Общие задачи об устойчивости движения”, в которой обосновал общий подход к исследованию устойчивости движения, из этого результаты Вышнеградского вытекали, как частный случай.

Во второй половине XX века были решены многие новые задачи об устойчивости систем. В современном виде ТАУ была создана к середине 60-х годов XX века, но развитие вычислительной техники поставило новые задачи, дало также и новые методы решения старых задач, развитие науки происходит и в настоящее время.

САУ состоит из двух основных частей: объекта управления (ОУ) и регулятора (Р). Однако, это разделение достаточно условное. ОУ представляет из себя “нечто”, в котором должны быть явно выражены одна или несколько входных и одна или несколько выходных величин. Так же на объект действуют помехи.

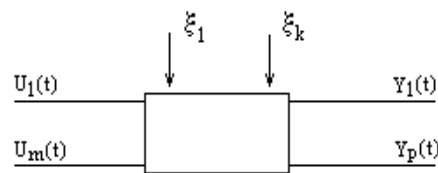


Рис. 1.2

$u(t)=(u_1(t).....u_m(t))^T$ - входное, управляющее воздействие.
 $y(t)=(y_1(t).....y_n(t))^T$ - выходное сигнал, состояние объекта.
 $\xi(t)=(\xi_1(t).....\xi_k(t))^T$ - вектор помех.

Для поддержания заданного режима функционирования объекта, что выражается в заданном поведении выходных величин y , осуществляется управление входными величинами u в соответствии с некоторым алгоритмом управления, построенным, в свою очередь, в соответствии с принципами управления.

Устройство, вырабатывающее управление, называют регулятором.

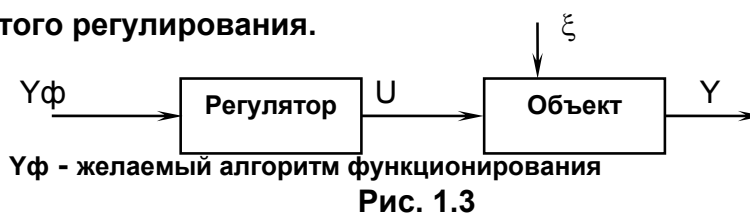
Перед регулятором ставится задача обеспечения заданного качества работы системы во всех практически важных режимах. Регулятор создаётся разработчиком системы, исходя из знаний о свойствах объекта управления и требуемых задачах системы.

Принципы управления (регулирования):

- **Принцип разомкнутого регулирования.**

Иначе говоря, принцип планового управления. Работает достаточно успешно при наличии двух условий:

- Достаточно информации о свойствах объекта и неизменности этих свойств в процессе работы.
- Незначительность или полное отсутствие помех.

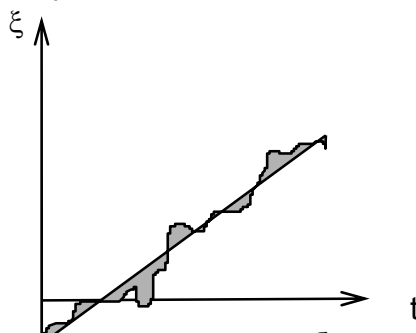
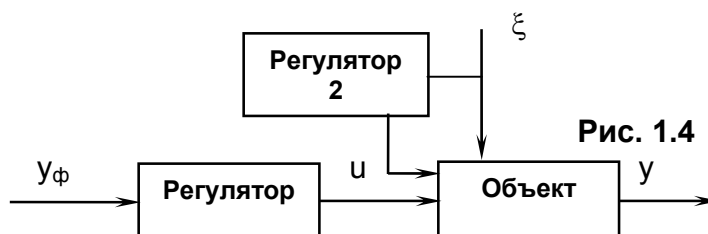


- **Принцип компенсации (управления по возмущению).**

Предложен Понселе (1829 г.). Принимаются меры к изучению или вычислению возмущающего воздействия ξ . Регулятор P_2 компенсирует помехи.

Именно поэтому качество работы этой системы выше качества системы работающей по принципу разомкнутого управления.

Главный недостаток этого принципа - необходимость измерения или априорного задания возмущения (например, его математической модели).



Закон изменения помехи должен быть известен, или помеха должна измеряться, для этого должна быть известна математическая модель помехи или установлен датчик для измерения.

- **Принцип замкнутого управления (управления с обратной связью, управления по отклонению)**

Предложен Чикалевым (1874 г.)

Этот принцип является наиболее общим, но и наиболее дорогим.

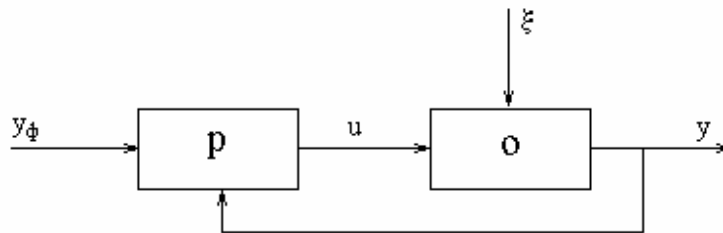


Рис. 1.6 канал обратной связи

Канал обратной связи является наиболее уязвимым местом. При нарушении его работы система может стать полностью неработоспособной.

Этот общий принцип управления чаще всего реализуется в виде **управления по отклонению**, то есть с использованием **сигнала ошибки $e(t)$** .

$$e(t) = y_{\phi}(t) - y(t)$$



Рис. 1.7

Если задача заключается в управлении объектом при наличии возмущающих воздействий, неточности задания математической модели объекта, погрешности измерений и повышенных требованиях к точности, то принцип управления по отклонению является наиболее совершенным.

- **Также возможно совместное (комбинированное) использование принципов управления, например, принципа компенсации возмущения и принципа ОС.**

Ниже на рисунке приведён пример такой системы, где имеется и контур отрицательной обратной связи, и цепи компенсации погрешностей и возмущений.

Это- модель электромеханической системы, содержащей привод, объект, датчики, регулятор и формирователь (задатчик) желаемого поведения выходного сигнала $Y(t)$. В этой модели САУ считается, что помехи действует линейно, т.е. прибавляются к сигналу. Очевидно, что использован комбинированный принцип управления.

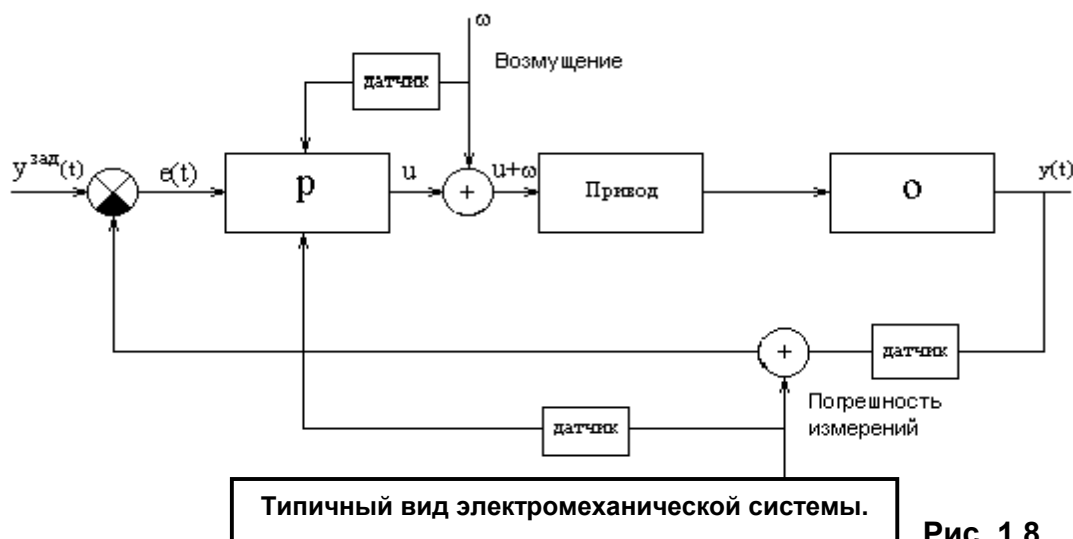


Рис. 1.8

К подобному виду часто можно привести типовые САУ, причём не только электромеханические, но и любой другой природы.

Именно этот факт универсальности методов автоматического управления для систем любой природы делает ТУ настоящей наукой, имеющей универсальное применение. Её методы одинаково подходят и в электромеханике, и в теории связи, и при описании и исследовании биологических или экономических систем.

Типы САУ по задачам управления (по типу задающего воздействия):

Обратимся к виду задающего воздействия (“уставки”, задатчика) $y^{зад}(t)$. Это – желаемое поведение системы, желаемый алгоритм функционирования. От вида и способа формирования этого сигнала в значительной степени зависит способ построения регулятора. В зависимости от вида $y^{зад}(t)$ принято классифицировать САУ по задачам управления:

- **Системы стабилизации:** $y^{зад} = const$.
- **Системы программного управления:** $y^{зад}(t)$ - является функцией времени и заранее известна.
- **Системы следящие:** $y^{зад}(t)$ - заранее неизвестно.

Отметим, что эти задачи являются усложняющимися, в самом деле, всегда можно считать, что $y^{зад} = const$ является частным случаем известной функции. Также очевидно, что управлять системой с заранее неизвестным $y^{зад}(t)$ сложнее, чем системой с заранее известным законом функционирования.

Типичным примером системы стабилизации может служить контур поддержания постоянной температуры в помещении (обратите внимание на наличие в системе помех в виде изменяющихся условий: в помещение входят и выходят люди и т.п.!) Ещё одним примером может служить система АПЧГ – автоматической подстройки частоты гетеродина приёмника.

Примером САУ программного управления является система поддержания заданного технологического режима, например, закона нагрева подложек микросхем, когда известна требуемая температурная кривая.

Замечание: не следует путать принцип программного управления и систему программного управления (имеется, к сожалению, неудачная сложившаяся терминология).

Наконец, примером следящей системы может являться любая система дистанционного управления перемещением, например, робот-манипулятор, управляемый специальным “джойстиком”. В этом случае объект должен точно воспроизвести любые **заранее неизвестные перемещения, притом, возможно, в условиях помех.**

Принято считать, что современная экономика развивается по принципу обратной связи, обеспечивающей в данном случае устойчивость системы в целом при изменяющихся внешних условиях (природа, общество). Следует, однако, отметить, что в этом случае не просто сформулировать задачу управления. Обычно в таком случае имеются дополнительные критерии качества, которые должны достигать максимального/минимального значения. Скажем, таким критерием может являться стоимость управления.

Более точно такие системы описываются, как системы оптимальные, когда в явном виде представлен некоторый критерий выгоды, и задача заключается в его максимизации или минимизации (в зависимости от сути задачи). Поэтому, наряду с принципом управления с обратной связью, здесь принято говорить о принципах оптимального управления. Однако, это скорее касается конструкции регулятора, не принципа его работы, а конкретного алгоритма управления. В самом деле, независимо от того, оптимальный используется алгоритм управления, или нет, **исходной и единственной информацией для него обычно служит сигнал отклонения текущего поведения объекта от желаемого.**

Справедливости ради заметим, что в некоторых случаях и сам принцип управления с обратной связью может автоматически вытекать из решения оптимальной задачи управления. При таком подходе заранее не задан принцип управления, но явно задан критерий оптимальности.

Классификация САУ.

Методов исследования САУ известно много, и имеется следующая их классификация, учитывающая способы математического описания и характер протекания процессов в системе.

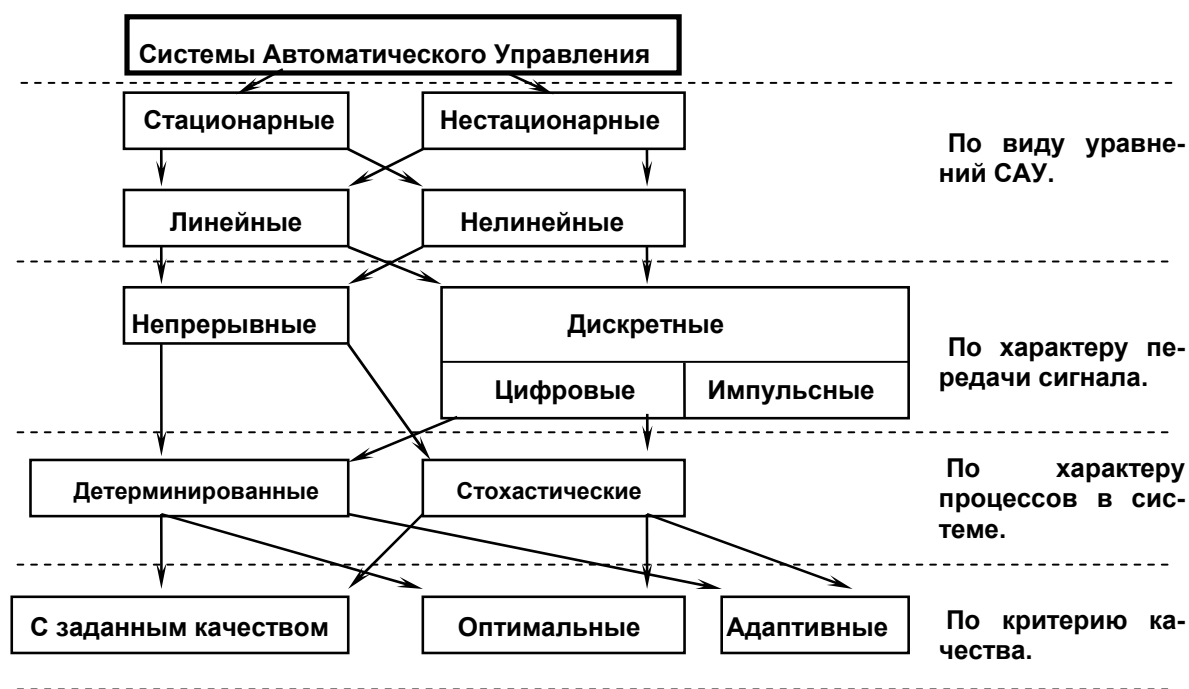


Рис.1.9

В этой первой (классической) части курса рассматриваются стационарные линейные непрерывные системы с заданным качеством. Под заданным качеством понимается обеспечение требуемых инженерных показателей по принципу “не хуже заданного”.

Также рассмотрены линейные оптимальные системы с квадратичным критерием качества.

Во второй части курса изучаются импульсные системы (системы с квантованием по времени) и некоторые эффективные методы исследования нелинейных систем.

• Лекция 2.

Математические модели САУ. Уравнение объекта.

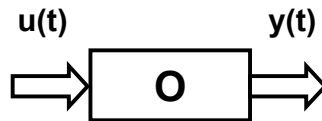


Рис. 2.1

$u(t) = (u_1(t) \dots u_k(t))^T$; входная величина, управление.

$y(t) = (y_1(t) \dots y_p(t))^T$; выходная величина (выход), состояние.

Может показаться, что моделью такого объекта может быть сложная нелинейная **функция** (не оператор):

$$F(y, u) = 0 \quad (*)$$

На самом деле, такая функция часто не может описать объект, точнее, его динамику. В соответствии с теоремой Юнга о неявно заданной функции, можно выразить:

$$y_i = \varphi(y_1, \dots \text{кроме } y_i, y_p, u)$$

Нетрудно видеть, что ступенчатое изменение входного сигнала u приводит к ступенчатому же изменению выходного сигнала, т.е. отсутствуют переходные процессы. Поэтому для рассмотрения объектов имеющих переходные процессы необходимо использовать более сложные модели.

$$F(y', y'', \dots y^{(n)}, u', u'', \dots u^{(m)}) = 0 \quad (**)$$

- это наиболее общий вид нелинейного дифференциального уравнения (д.у.), связывающего входной и выходной сигнал. Так как y и u , в свою очередь, являются векторами, то на самом деле (***) есть система нелинейных дифференциальных уравнений.

Существует два способа получения д.у. объекта:

- **Способ применения известных законов** (закон Ома, законы механики и т.д.). Эти законы не требуют экспериментальной проверки, достоверность применения моделей на их основе очевидна.

Способ применим в случаях, когда объект управления простой и система невысокого порядка. Или когда объект очень сложный, и, вследствие его сложности, можно воспользоваться законами статистики.

- **Эвристический способ (гр. *heuriskö* - нахожу, открываю).**

Заключается в том, что вместо использования готовых законов, предлагаются уравнения, не вытекающие ни из каких законов, а основанные на опыте работы с предыдущими объектами, то есть различные экспертные оценки, мнение опытных специалистов. Такое описание называют феноменологическим, т.е. описанием объекта по основным чертам его внешнего поведения, без глубокого формального (математического, физического и т.п.) проникновения в сущность его функционирования.

Для полученной таким образом модели должны быть исследованы:

1. **адекватность**, т.е. насколько модель соответствует поведению реального объекта;
2. **границы адекватности**, т.е. те пределы изменения параметров и переменных модели, при которых сохраняется адекватность.

Для проверки адекватности и границ адекватности существует множество методов, выходящих за рамки ТУ. С другой стороны, вопросы, связанные с уточнением модели и подстройкой модели в ходе работы изучаются в специальных разделах ТУ, которые называются методами идентификации и методами адаптивного управления соответственно.

Пример 1.

Приведём пример такого эвристического построения модели сложной экологической системы, когда нет априорно никаких конкретных законов, которые можно было бы использовать для получения готовых уравнений.

Построим модель водоема с карасями. Пусть в нем водится рыба, которая вылавливается с интенсивностью Π .

$x(t)$ - текущее количество рыбы.

Π - интенсивность вылова, в единицу времени.

$$dx = kxdt - \Pi dt$$

$k(x)$ - коэффициент размножения, вообще говоря, является функцией от x ;

$k(x) \approx k_0 + k_1x + \dots$ **внимание !!! – это эвристическое выражение.**

$$\frac{dx}{dt} = (k_0 + k_1x)x - \Pi; \text{ - дифференциальное уравнение.}$$

Теперь выясним, что означают коэффициенты k_0 и k_1 . Понятно, что они описывают разные свойства коэффициента размножения, именно:

k_0 - рост численности пропорционально количеству рыбы;

$k_1 x$ - рост численности пропорционально количеству пар (почему?) рыб, то есть в соответствии с некоторым "законом размножения".

Будем считать, что эти два эффекта достаточно полно описывают биологию (эвристически) и выясним, адекватна ли полученная модель.

Упростим дифференциальное уравнение, сделав замены переменных по формулам:

$t = \tau \alpha$; замена независимого переменного (времени);

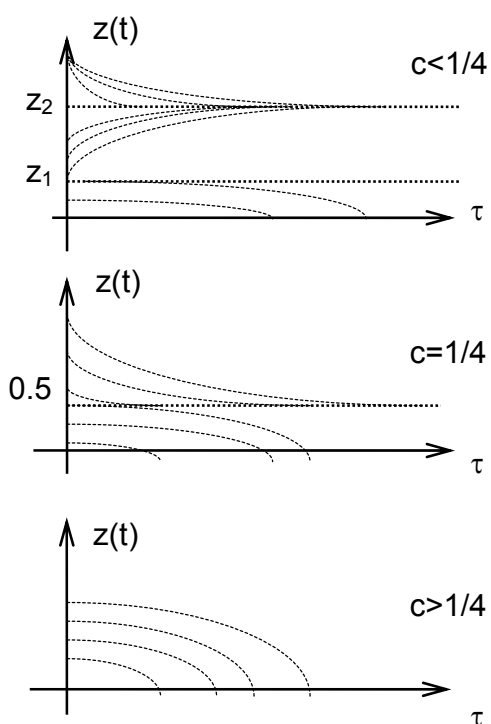
$z = x/\beta$; замена зависимого переменного (численности).

$\alpha = 1/k_0$; $\beta = k_0/k_1$; $c = \Pi/k_1$;

$$\frac{dz}{d\tau} = (1-z)z - c; \text{ уравнение в условных единицах.}$$

Полученное уравнение можно относительно легко исследовать, для этого проще всего найти стационарные решения, то есть положения равновесия из условия $\frac{dz}{d\tau} = 0$.

Это даёт квадратное уравнение, которое может иметь два или один (кратности два) вещественный корень. Поведение количества рыбы (в условных единицах) от времени приведено в случаях разной интенсивности отлова C (также в условных единицах).



Динамика численности карасей в водоёме в зависимости от вылова в единицу времени. Имеется свойство автостабилизации численности при умеренном лове.

Видим, что полученная модель описывает интересные эффекты – стабилизация количества рыбы при умеренном вылове C и при достаточном начальном количестве $z(0)$. Напротив, караси вымирают за конечное время, если их было мало или ловили слишком много в единицу времени. Характерным является свойство автостабилизации численности независимо от начального количества (в разумных пределах). **Можно сделать вывод, что данная эвристическая модель правильно передаёт важнейшие принципиальные свойства системы, то есть, адекватна. Вопрос о границах адекватности требует дополнительного квалифицированного исследования с привлечением специалистов-биологов.**

Уравнение получилось **нелинейным**. Только вследствие его крайней простоты удалось получить решение и попытаться разработать "регулятор" (выбрать интенсивность отлова).

Однако, для общих нелинейных дифференциальных уравнений этого сделать не удастся из-за сложности, и модель объекта приходится упрощать.

Единственным классом дифференциальных уравнений поддающимся эффективному исследованию, является линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и системы таких уравнений. В этом случае уравнение (**) примет следующий вид:

$$A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_n y = B_0 u^{(m)} + B_1 u^{(m-1)} + \dots + B_m u \quad (2.1)$$

Обозначим:

$$M = B_m + B_{m-1} \frac{d}{dt} + \dots + B_0 \frac{d^{(m)}}{dt^m}$$

и соответственно:

$$N = A_n + A_{n-1} \frac{d}{dt} + \dots + A_0 \frac{d^{(n)}}{dt^n}$$

Уравнение (2.1) примет операторный вид: $N*y = M*u$

• Лекция 3.

Положения, лежащие в основе линеаризации.

Линеаризация заключается в переходе к линейному дифференциальному уравнению, переменные которого являются отклонениями от некоторого номинального режима, удовлетворяющего уравнению (**).

Вычислим дифференциал F в (*), введя предварительно следующие обозначения:

$$Z = (y', y'', \dots, y^{(n)});$$

$$U = (u', u'', \dots, u^{(m)});$$

$$F(Z, U) = 0; \quad (**)$$

Пусть Z_H и U_H - номинальная траектория, удовлетворяющая (**)

$$dF = F(Z_H, U_H) + \frac{\partial F}{\partial Z}_{Z=Z_H, U=U_H} (Z - Z_H) + \frac{\partial F}{\partial U}_{Z=Z_H, U=U_H} (U - U_H) + O(|Z - Z_H|, |U - U_H|)$$

$F(Z_H, U_H) = 0$ т.к. траектория номинальная. Отбрасываем малые члены:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial Z}_{Z=Z_H, U=U_H} (Z - Z_H) + \frac{\partial F}{\partial U}_{Z=Z_H, U=U_H} (U - U_H) = 0} \quad (3.1)$$

- линеаризованное уравнение.

При этом $\frac{\partial F}{\partial Z}_{Z=Z_H, U=U_H}$ и $\frac{\partial F}{\partial U}_{Z=Z_H, U=U_H}$ - коэффициенты ряда Тейлора.

Введем новые переменные - отклонения от номинальных: $y = y - y_H$
и $u = u - u_H$

$$\frac{\partial F}{\partial y}_{Z=Z_H, U=U_H} y + \frac{\partial F}{\partial y'}_{Z=Z_H, U=U_H} y' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}_{Z=Z_H, U=U_H} y^{(n)} + \frac{\partial F}{\partial u}_{Z=Z_H, U=U_H} u + \frac{\partial F}{\partial u'}_{Z=Z_H, U=U_H} u' + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}}_{Z=Z_H, U=U_H} u^{(m)} + 0 = 0$$

(3.2)

Так как все частные производные представляют из себя либо постоянные матрицы, либо, в крайнем случае, матрицы зависящие только от времени, то полученное уравнение (3.2) есть либо система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно отклонений y и u , либо система с переменными коэффициентами. Постоянство или переменность зависит от номинальной траектории. В частности, в системах стабилизации, где номинальные траектории - константы, получаются постоянные матрицы.

Таким образом, перейдя к уравнениям в отклонениях, мы получаем систему линейных дифференциальных уравнений, которую рассматриваем относительно выходной величины. Порядок этой системы линейных дифференциальных уравнений равен n по порядку производной при y .

Дифференцирование же входного сигнала u рассматривается не как дифференциальное уравнение относительно u , а как операция с известным входным сигналом.

Соберем все коэффициенты дифференциальных уравнений в матрицы и получим окончательно следующую матричную систему:

$$\mathbf{A}_0(t)\mathbf{y}^{(n)} + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{y}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{A}_n(t)\mathbf{y} = \mathbf{B}_0(t)\mathbf{u}^{(m)} + \dots + \mathbf{B}_m(t)\mathbf{u} \quad (3.3)$$

Если удаётся удачно выбрать номинальную траекторию (это зависит не только от мастерства исследователя, но и от самой задачи), матрицы \mathbf{A}_i и \mathbf{B}_i становятся постоянными. И для такой системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно получить до конца точное решение и полностью его исследовать. В случае постоянных коэффициентов система называется **стационарной**.

Чаще всего оказывается, что входные и выходные величины объекта - скалярные функции. То есть имеется лишь по одному входу и выходу, матрицы превращаются в числа, а (3.3) принимает вид (3.4):

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(m)} + \dots + b_m u \quad (3.4)$$

Получили стационарный объект с одним входом и выходом (скалярный).

Именно такие скалярные стационарные объекты являются главным объектом исследования в классической ТАУ.

Переход от дифференциального уравнения порядка n к системе из n дифференциальных уравнений 1-го порядка

Такой переход позволяет единообразно исследовать системы любого порядка, что имеет важное значение, например, при моделировании на ЭВМ, в этом случае проще использовать стандартные матричные операции, чем иметь дело с дифференциальными уравнениями *разных порядков*.

Вводим дополнительные переменные (x_1, \dots, x_n) , равные производным $\mathbf{y}(t)$:

$$x_1 = y; \quad \dot{x}_2 = y; \dots; \quad x_n = y^{(n-1)};$$

Перепишем уравнение (3.4): $y^{(n)} = -1/a_0 (a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y - b_0 u^{(m)} - \dots - b_m u)$.

Очевидно, что имеет место следующая система из n уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = -\frac{1}{a_0} (a_n x_1 + \dots + a_1 x_n - b_0 u^{(m)} - \dots - b_m u) \end{cases} \quad (3.5)$$

Начальные условия для $\mathbf{y}(t)$ переходят в начальные условия для (x_1, \dots, x_n) .

Для выражения выходной величины преобразуем (6) в векторно-матричную систему с выходом. Отметим для этого, что настоящий выход объекта $\mathbf{y}(t)$ равен x_1 .

Можно ввести вектор-строку из n компонент: $\mathbf{c} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$,

при этом $\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}^T (x_1 \ \dots \ x_n) = 1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$.

Теперь система дифференциальных уравнений (6) может быть записана в матричном виде следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t). \end{cases}$$

(3.6)

Здесь обозначено: $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)^T$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_1}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{bu}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \frac{b_0}{a_0} u^{(m)} & \dots & \dots & \dots & \frac{b_m}{a_0} u \end{pmatrix};$$

Решение системы уравнений (3.6) всегда может быть записано в следующем виде (Формула Коши, интеграл Дюамеля):

$$\mathbf{y}(t) = c e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + c \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{bu}(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

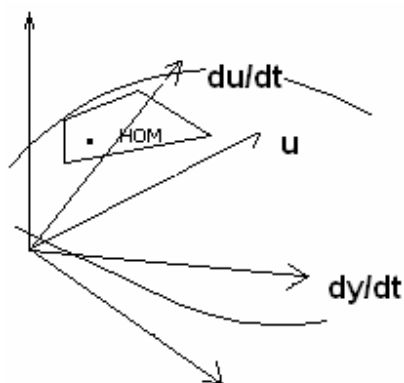
Здесь первое слагаемое – общее решение однородного уравнения, второе – частное неоднородного. Формула (8) справедлива вне зависимости от порядка исходного дифференциального уравнения.

В правую часть уравнения (3.6) и формулы (3.7) входят производные от управляющего воздействия. Можно показать, что от этих производных можно избавиться. Они будут вычисляться “автоматически” в процессе решения системы уравнений, и выглядит это следующим образом. Нужно вместо вектора \mathbf{b} взять вектор \mathbf{g} , компоненты $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{n-1}$ которого уже не обязательно равны 0, но вычисляются по следующей рекуррентной формуле:

$$\mathbf{gu}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{g}_n \end{pmatrix} u(t); \quad \mathbf{g}_0 = 0; \quad \mathbf{g}_i = \frac{1}{a_0} (b_i - \sum_{k=0}^{i-1} a_{i-k} \mathbf{g}_k); \quad (3.8)$$

Это рекуррентная формула в том смысле, что \mathbf{g}_i вычисляется последовательно, друг за другом. В случае, когда нет производных от входа, автоматически получаем вектор $\mathbf{g} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b_0/a_0)$;

Геометрическая интерпретация и пример линеаризации.



$F = (\dot{y}, \dot{y}, \dot{u}, \dot{u}, \dots) = 0$. Это уравнение (***) можно понимать, как уравнение поверхности в многомерном пространстве с многочисленными координатами, являющимися переменными y, u и их производными всех входящих в (***) порядков.

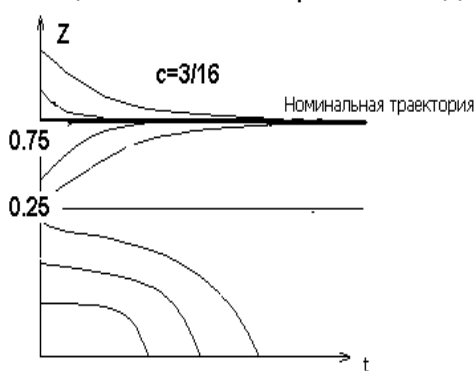
Номинальная траектория есть просто точка на поверхности, **линеаризованное уравнение (2-4) – уравнение касательной плоскости в номинальной точке.**

Линеаризованное уравнение как касательная плоскость.

Рис. 3.1

Пример 2. Линеаризация водоема с карасями.

$F(z, \dot{z}, c) = 0$; $\dot{z} = (1-z)z - c$; - Полученное ранее в лекции 2 уравнение, описывающее количество рыбы в водоёме.



Определим номинальный режим (траекторию). Часто номинальная траектория находится из условия равновесия.

$\dot{z} = 0 \Rightarrow z - z^2 = c$, при $c = 3/16$ получаем $z_1 = 0.25$; $z_2 = 0.75$.

В окрестности z_1 движение неустойчиво (численность нестабильна), а $z_2 = 0.75$ подходит для номинального режима. Проведём линеаризацию именно в окрестности z_2 .

Рис. 3.2

Таким образом: $z_H = 0.75$; $\dot{z}_H = 0$; $c_H = 3/16$;

В нашем случае нелинейность выражена только в виде зависимости от z .

$\dot{z} + z^2 - z + c = 0$

$(z - z_{НОМ}) + 2z(z - z_{НОМ}) - (z - z_{НОМ}) + (c - c_{НОМ}) = 0$

$z + 1.5z - 1.5 \cdot 0.75 - z + 0.75 + c - \frac{3}{16} = 0$

Переходя к исходному уравнению и вводя переменные в отклонениях: $x = z - z_{НОМ}$, $u = c - c_{НОМ}$, **получаем линейное д.у. в отклонениях от номинального режима:**

$\dot{x} = -0.5x + u$;

• Лекция 4.

Метод преобразования Лапласа - основной метод исследования линейных систем с постоянными коэффициентами.

Мы не будем здесь подробно излагать свойства преобразования Лапласа, отметим лишь наиболее важные для ТУ.

При нулевых начальных условиях, после преобразования Лапласа уравнения вида (5), получаем $L\{(5)\}$:

$$L\{a_0x^{(n)} + \dots + a_n x\} = L\{b_0u^{(m)} + \dots + b_m u\};$$

$$(a_0p^n + \dots + a_n)X(p) = (b_0p^m + \dots + b_m)U(p)$$

$$L\{x(t)\} = X(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt$$

$$L\{u(t)\} = U(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt;$$

Для линейного уравнения преобразование Лапласа выходного сигнала $X(p)$, отнесенное к преобразованию Лапласа входного сигнала $U(p)$ не зависит от самих сигналов. Это внутреннее свойство самого объекта.

$$X(p) = \frac{b_0p^m + \dots + b_m}{a_0p^n + \dots + a_n} U(p) \quad (4.1)$$

Дробь в этой формуле назовём **передаточной функцией (ПФ)**.

$$X(p) = W(p)U(p)$$

$$W(p) = \frac{b_0p^m + \dots + b_m}{a_0p^n + \dots + a_n} \quad (4.2)$$

Определение 1: Передаточной функцией системы (объекта) называется отношение преобразования Лапласа выходного сигнала к входному при нулевых начальных условиях.

Порядок системы n – порядок полинома знаменателя передаточной функции.

Передаточная функция $W(p)$ зависит только от самих дифференциальных уравнений. Передаточная функция $W(p)$ определена только для линейных уравнений и выражает свойство линейности: если $U(p) = U_1(p) + U_2(p)$, то, очевидно: $X(p) = W(p)(U_1(p) + U_2(p)) = W(p)U_1(p) + W(p)U_2(p) = X_1(p) + X_2(p)$;

$$X(p) = W(p)(\gamma U_1) = \gamma W(p) U_1;$$

Например, устройство, вычисляющее модуль входного сигнала или квадрат входного сигнала не описывается передаточной функцией (почему?).

Типовые звенья САУ.

Полиномы числителя и знаменателя передаточной функции можно разложить на простейшие множители по их корням.

$$W(p) = \frac{N(p)}{P(p)} = \mu \frac{(p - p_1^q) \dots (p - p_m^q)}{(p - p_1^3) \dots (p - p_n^3)}, \quad \left. \begin{array}{l} \{p_i^q\} - \text{корни числителя} \quad N(p) = 0 \\ \{p_i^3\} - \text{корни знаменателя} \quad P(p) = 0 \end{array} \right\}$$

здесь $\mu = b_0/a_0$ – константа.

множество корней числителя и знаменателя

Возможны два случая:

- Корни вещественные. Оставляем скобки без изменения.
- Пара комплексно сопряженных корней вида: $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ - объединяем их и раскрываем скобки $(p - \alpha + j\beta)(p - \alpha - j\beta) = p^2 - 2\alpha p + \beta^2 + \alpha^2$ - полином имеет вещественные коэффициенты.

После такого представления в числителе и знаменателе будет некоторое количество скобок первого порядка, соответствующих вещественным корням, и некоторое количество скобок второго порядка, соответствующих комплексно – сопряженным корням. При этом все числовые коэффициенты в скобках будут вещественными. **Рассмотрим каждую такую скобку, как элементарную передаточную функцию, практически реализуемую в силу вещественности коэффициентов.**

$$W(p) = \frac{N(p)}{P(p)} = \mu \frac{(p - p_1^q) \dots (p - p_m^q)}{(p - p_1^3) \dots (p - p_n^3)} = K W_1(p) \dots W_{\Sigma}(p) \quad (4.3)$$

$\Sigma = n+m$, если все корни вещественные;

$\Sigma < n+m$, если есть комплексные корни.

Принято выносить общий множитель K за скобки так, чтобы свободный член всех скобок был равен 1. Тогда K называют коэффициентом усиления. Заметим, что $W(0) = K = b_m/a_n$. Это значит, что K есть коэффициент усиления на нулевой частоте - "постоянном токе".

Итак, любая $W_i(p)$ может быть одного из следующих видов:

Типовые звенья ТАУ		
1.	K -	Усилительное звено.
2.	p -	Дифференцирующее звено.
3.	$1/p$ -	Интегрирующее звено (интегратор).
4.	$K/(Tp+1)$ -	Инерционное (апериодическое) звено.
5.	$K/(T^2p+2dTp+1)$ -	Колебательное звено.
6.	$K(Tp+1)$ -	Форсирующее звено.
7.	$K(T^2p+2dTp+1)$ -	Форсирующее звено 2-го порядка.

Замечание:

- форсирующее звено (4) является комбинацией (суммой) усилителя и дифференциатора;
- звенья (2), (6), (7) не являются в строгом смысле реализуемыми.

- **Лекция 5.**

Типовые входные воздействия.

В соответствии с принципом суперпозиции и линейности достаточно изучить реакцию объектов на некоторые простые **типовые** входные воздействия. Реакция на более сложные входные воздействия будет получаться как комбинация простых .

1. Единичная ступенька $1(t)$.

$$1(t) = \begin{cases} 1; t > 0 \\ 0; t < 0 \end{cases}$$

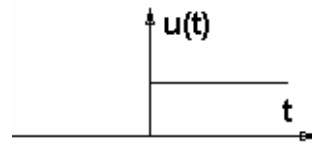


Рис. 5.1

Преобразование Лапласа имеет вид:

$$1(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$$

2. Линейно нарастающее входное воздействие $t(t)$.

$$t(t) = \begin{cases} t \text{ при } t \geq 0 \\ 0 \text{ при } t < 0; \end{cases}$$

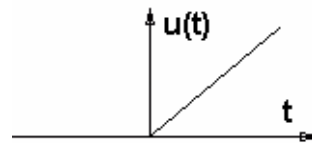


Рис. 5.2

Преобразование Лапласа: $t(p) = \int_0^{\infty} te^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}t}{-p} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}$

Замечание: Т.к. производная от единичной линейной функции равна 1, то:

$$1(t) = \frac{d}{dt} t(t) \quad ; \quad t(t) = \int_0^t 1(t) dt \quad ;$$

Замечание: $Y(p) = W(p) (pU(p)) = p W(p) U(p)$, где $p W(p) U(p)$ – производная выхода при нулевых начальных условиях. Это важнейшее свойство оператора Лапласа (дифференцирования) для линейных систем:

дифференцирование входного сигнала переставимо (коммутирует) с передаточной функцией.

То есть фактически (математически) безразлично вначале продифференцировать сигнал и после этого пропустить его через ПФ, или вначале пропустить, а затем продифференцировать выходной сигнал. На самом деле, справедливо и гораздо более сильное утверждение: передаточная функция коммутирует с любой аналитической функцией от оператора дифференцирования, например, полиномом $P(p)$ или, скажем, экспонентой e^{-p} .

3. Экспонента $e^{\alpha t}$ с вещественным показателем.

Преобразование Лапласа:
$$L(e^{\alpha t}) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \frac{1}{p-\alpha}$$

Полученное выражение, конечно, справедливо и при любом комплексном α . Воспользуемся этим фактом, чтобы рассмотреть следующий случай:

4. Гармонические входные воздействия $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$.

С помощью Формулы Эйлера и выделения вещественной и мнимой частей:

$$\sin \omega t = \text{Im } e^{j\omega t} \quad \text{т.к. } e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Соответственно $\cos \omega t = \text{Re } e^{j\omega t}$.

Поэтому преобразования Лапласа обеих функций имеют вид:

$$L\{\sin \omega t\} = L(\text{Im } e^{j\omega t}) = \text{Im } L(e^{j\omega t}) = \text{Im} (1/(p-j\omega)) = \text{Im}((p+j\omega)/(p^2+\omega^2)) = \text{Im}(p/(p^2+\omega^2) + j\omega/(p^2+\omega^2)) = \omega / (p^2+\omega^2).$$

$$L\{\cos \omega t\} = L(\text{Re } e^{j\omega t}) = \text{Re } L(e^{j\omega t}) = \text{Re} (1/(p-j\omega)) = \text{Re}((p+j\omega)/(p^2+\omega^2)) = \text{Re}(p/(p^2+\omega^2) + j\omega/(p^2+\omega^2)) = p / (p^2+\omega^2).$$

5. $\delta(t)$ - функция (математическая модель очень короткого, но конечного воздействия большой мощности).

Определение $\delta(t)$ -функции даётся через интеграл свёртки с любой другой интегрируемой функцией $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)x(t)dt = x(t_0); \quad \text{отсюда при } x(t) = 1: \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1; \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-pt} dt = 1; \quad (5.1)$$

Поэтому преобразование Лапласа $\delta(t)$ -функции имеет вид: $L\{\delta(t)\} = 1$.

Замечание: $\delta(t)$ - функция связана с единичной ступенчатой и линейно-нарастающей функциями:

$$\delta(t) = d1(t)/dt = d^2t(t)/dt^2 \quad (5.2)$$

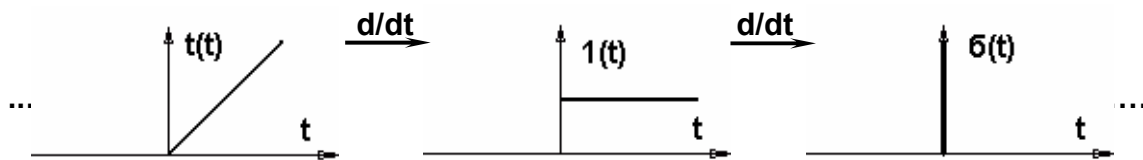


Рис. 5.3

Так получается целый ряд полиномиальных функций, связанных операцией дифференцирования (интегрирования), продолжающийся в обе стороны.

Определение 2:

Переходной функцией $H(t)$ объекта с передаточной функцией $W(p)$ называется реакция на единичную ступеньку на входе при нулевых начальных условиях.

$$H(p) = W(p)/p. \quad (5.3)$$

Определение 3:

Весовой функцией $h(t)$ (импульсной переходной функцией) блока с передаточной функцией $W(p)$ называется реакция на δ -функцию на входе при нулевых начальных условиях.

$$h(p) = W(p) \cdot 1 = W(p). \quad (5.4)$$

Очевидно, что $h(p) = pH(p)$, что соответствует (5.2).

Произведение изображений соответствует свертке оригиналов, поэтому имеется формула свертки, выражающая выход блока через интеграл от произведения весовой функции и входного сигнала:

т. к. $Y(p) = W(p)U(p)$, то при подаче $\delta(t)$ на вход, выход блока равен передаточной функции: $Y(p) = W(p) \cdot 1$. Поэтому по **Определению 3**: $h(p) = W(p)$. Сделаем обратное преобразование Лапласа и получим:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau = x(t_0); \quad (5.5)$$

Выходной сигнал в каждый момент времени зависит не только от входного сигнала в этот момент времени, но и от входа во все предыдущие моменты времени с "весом", определенным функцией $h(t)$.

Из (5.5) и из (5.3) вытекает следующая схема проведения эксперимента по определению параметров звена (блока):

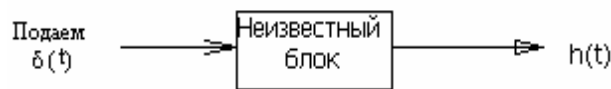


Рис. 5.4

Первый подход: подадим на вход $\delta^*(t)$.

Пусть $\delta^*(t) \approx \delta(t)$ (т.к. $\delta(t)$ физически не реализуема), измерим $h^*(t) \approx h(t)$. Теперь можно вычислить $L\{h^*(t)\} = W^*(p) \approx W(p)$.

Другой подход: На вход подаем $1(t)$.

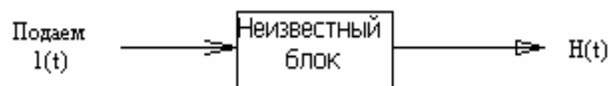


Рис. 5.5

Измеряем $H(t)$ и вычисляем $W(p)$: $W(p) = L\left\{\frac{d}{dt}H(t)\right\}$;

Замечание: численное дифференцирование – некорректная операция.

• Лекция 6.

Передаточная матрица для системы дифференциальных уравнений.

Передаточная матрица для системы дифференциальных уравнений соответствует преобразованию Лапласа для векторных сигналов и рассматривается абсолютно аналогично с учетом некоммутативности матриц.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (6.1)$$

Рассмотрим систему (18) более общую, чем (7), она отличается тем, что в данном случае может быть многомерный вход и многомерный выход:

A – матрица ($m \times n$);

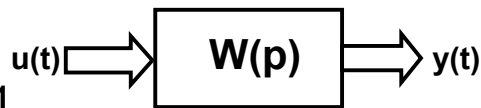
B – матрица ($n \times k$);

C – матрица ($r \times n$);

u – k -мерный вектор;

y – r -мерный вектор.

Рис. 6.1



Блок имеет множество входов и выходов.

Делаем преобразование при 0 начальных условиях:

Лапласа

$$\begin{cases} px(p) = Ax(p) + Bu(p) \\ y = Cx(p) \end{cases}$$

Выразим выход

через вход:

$$(pE-A)x(p) = Bu(p); \quad x(p) = (pE-A)^{-1}Bu(p); \quad Y(p) = C(pE-A)^{-1}Bu(p);$$

$$Y(p) = W(p)U(p) = C(pE-A)^{-1}BU(p). \quad (6.2)$$

Чтобы получить передаточную матрицу, необходимо, таким образом, вычислить обратную матрицу. Элементы передаточной матрицы будут представлять собой дробно-рациональные функции оператора p , наименьший общий знаменатель которых является характеристическим полиномом $P(p)$ системы (6.1). Справедливо равенство: $P(p) = \det(pE-A)$.

Важнейшим понятием, широко применяемым в ТУ, является понятие частотных характеристик. Именно методы, основанные на применении частотных характеристик, являются наиболее конструктивными и удобными в инженерной практике специалиста по автоматике. К сожалению, они наиболее применимы именно в классическом случае системы с одним входом и выходом.

Определение 4:

Амплитудно-фаза-частотной характеристикой (АФЧХ) блока с передаточной функцией $W(p)$ называется комплексно-значная функция $W(j\omega)$ вещественного аргумента ω , полученная при подстановке $p = j\omega$.



Рис. 6.2 Спектр периодической функции являются отдельные точки.

Покажем, какая имеется связь между спектром сигналов в системе, частотной характеристикой и преобразованием Лапласа.

Спектр периодической функции является набор ее коэффициентов Фурье. Если имеем периодическую функцию с периодом T , то коэффициент Фурье a_k вычисляется по формуле:

$$a_k = 1/T \int_0^T x(t) e^{-ik2\pi t/T} dt ; \quad (6.3)$$

При увеличении периода T , интервал между точками спектра уменьшается, в одной и той же полосе частот становится больше точек спектра, спектр становится "плотнее". В пределе переходим к неперiodической функции.

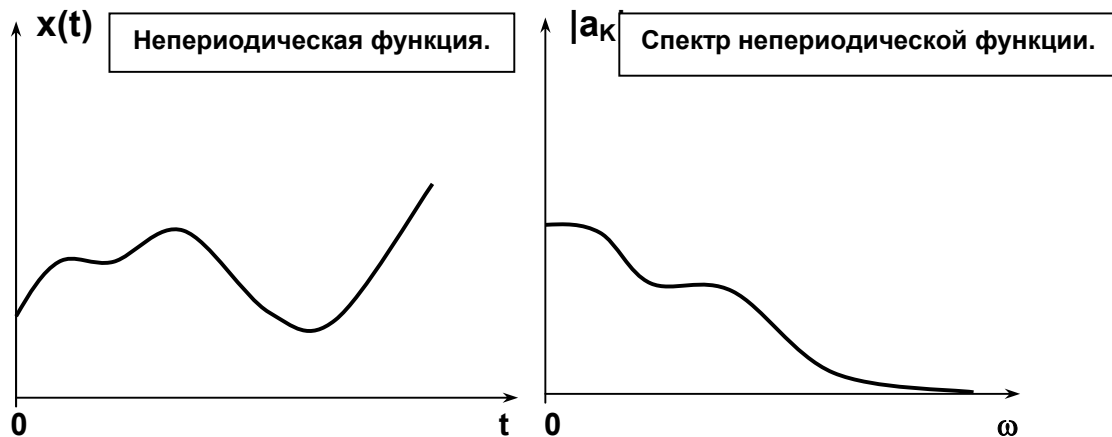


Рис. 6.3 Для неперiodической функции спектр становится непрерывным.

При устремлении периода в бесконечность, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье, а коэффициенты Фурье переходят в преобразование Фурье по следующей формуле:

$$\Phi\{x(t)\} = \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt; \quad \text{Преобразование (интеграл) Фурье;} \quad (6.4)$$

Интеграл Фурье следует понимать, как разложение Фурье $x(t)$ по непрерывным частотам.

Теперь, наконец, покажем, что имеется важнейшая связь между непрерывным спектром (преобразованием Фурье) и преобразованием Лапласа, лежащая в основе известной подстановки $p=j\omega$. В самом деле, так как $x(t)=0$ при $t < 0$ (функция является оригиналом для преобразования Лапласа), то:

$$L\{x(t)\} = X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt; \quad \text{Преобразование Лапласа;} \quad (6.5)$$

$$\Phi\{x(t)\} = \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \stackrel{\text{т.к } x(t)=0 \text{ при } t<0;}{=} \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt; \quad \text{Преобразование Фурье;}$$

Вывод: Подстановка $p=j\omega$ в изображение по Лапласу произвольной функции (оригинала) превращает преобразование Лапласа в спектр или, что есть то же самое, в преобразование Фурье. Поэтому от передаточной функции переходим к спектрам входного и выходного сигналов.

$$Y(p)=W(p)U(p) \quad \text{при подстановке} \quad p=j\omega: \\ Y(j\omega)=W(j\omega)U(j\omega); \quad (6.6)$$

$W(j\omega)$ явно описывает изменение спектра при прохождении через блок с передаточной функцией $W(p)$. Формула (6.6) справедлива для любого входного сигнала. Но, так как произвольный сигнал может быть разложен по гармоническим составляющим (в ряд или интеграл Фурье, в зависимости от периодичности), особенно важно знать, как преобразуется простейший гармонический сигнал при прохождении через блок с ПФ $W(p)$. Известно, что при поступлении на вход линейного блока с любой передаточной функцией гармонического сигнала после окончания переходного процесса на выходе устанавливается гармонический сигнал той же частоты. Конечно, требуется, чтобы переходный процесс заканчивался, то есть, чтобы решение однородного уравнения в формуле (6.7) стремилось к 0.

$$Y_{\text{неоднородного}}^{\text{общее}}(t) = Y_{\text{однородного}}^{\text{общее}}(t) + Y_{\text{неоднородного}}^{\text{частное}}(t); \quad (6.7)$$

Из (6.7) следует, что при подаче на вход блока простого гармонического сигнала $u(t)=\sin \omega t$, выходной сигнал в установившемся режиме будет гармоническим с изменившимися амплитудой и фазой. Воспользуемся комплексным методом для определения амплитуды и фазы $y(t)$. $u(t)=\text{Im}(e^{j\omega t})$; $y(t)=L^{-1}\{W(p)L\{\text{Im}(e^{j\omega t})\}\}$; Но оператор Лапласа и его обратный переставимы с операцией взятия **Im**-мнимой части. Поэтому: $y(t)=\text{Im}(L^{-1}\{W(p)L\{e^{j\omega t}\}\})$; Соответственно: $Y(p)=\text{Im}(W(p)L\{e^{j\omega t}\})$;

Сделаем подстановку $p=j\omega$: $Y(j\omega)=A(\omega)L\{e^{j(\omega t+\varphi(\omega))}\}=\text{Im}(W(j\omega)L\{e^{-j\omega t}\})$;
 $A(\omega)L\{e^{j(\omega t+\varphi(\omega))}\}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}L\{e^{j\omega t}\}$; Теперь можно вычислить АФЧХ:

$$W(j\omega) = Y(j\omega)/U(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} / e^{j\omega t} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{- АФЧХ;} \\ W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{i \arg W(j\omega)} = |W(j\omega)| e^{i\varphi(\omega)}; \quad (6.8)$$

Где: $|W(j\omega)|$ - АЧХ - Амплитудно-частотная характеристика;
 $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ - ФЧХ - Фазочастотная характеристика.

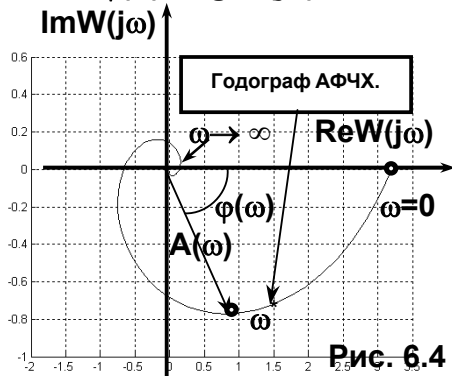


Рис. 6.4

Частотные характеристики показывают амплитуду и фазу установившегося гармонического сигнала на выходе при поступлении на вход гармонического сигнала единичной амплитуды.

АФЧХ удобно изображать в виде годографа (греч. *hodos* - путь + "граф") на комплексной плоскости с координатами $ReW(\omega)$ и $ImW(\omega)$.

Параметром на кривой годографа является частота, изменяющаяся в интервале от 0 до ∞ . Для произвольной частоты ω^* радиус вектор в точке $W(\omega^*)$ показывает амплитуду выходного сигнала, а угол $\varphi(\omega^*)$ - сдвиг фазы между выходным и входным сигналом. Иногда ещё $W(j\omega)$ называют комплексным коэффициентом передачи, подразумевая, что АФЧХ является обобщением обычного коэффициента усиления K на случай его зависимости от частоты и имеющийся фазовый сдвиг, также зависящий от частоты.

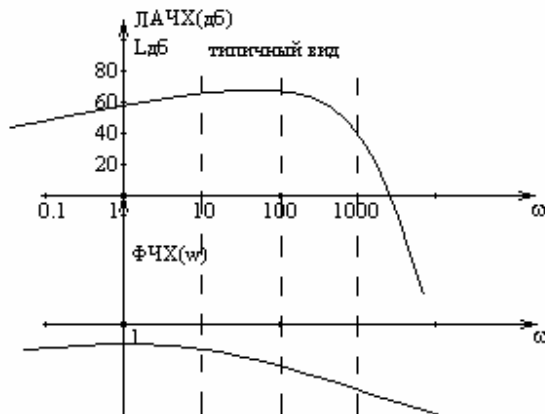
В инженерной практике иногда используются (однако, гораздо реже) графики отдельно **АЧХ** и **ФЧХ** (25). В этом случае проще проследить конкретную зависимость от частоты, так как частота является координатой этих графиков. Но чаще всего используют **логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ)**, то есть графики **ЛАЧХ** и **ФЧХ** в логарифмических координатах. Удобство их применения станет понятным далее.

ЛАЧХ: $L(\omega) \text{ (дБ)} = 20 \lg |W(j\omega)|$

ФЧХ: $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$

Логарифмические частотные характеристики

(6.9)



Отметим, что в логарифмическом масштабе по оси ординат в начале осей стоит **не 0 частота, а любая удобная по смыслу задачи**. Чаще всего это 1. Далее - **в декадах**.

На графике ЛАЧХ - $L(\omega)$ по оси ординат откладывают **децибелы**.

На графике ФЧХ - $\varphi(\omega)$, имеющим общую ось ординат с графиком ЛАЧХ, по оси ординат откладывается фаза в **радианах или градусах**.

Рис. 6.5

- **Лекция 7.**

Характеристики типовых звеньев ТАУ.

В Лекции 4 дано определение типовых звеньев ТУ. Перейдём к изучению их свойств. Для каждого звена будем рассматривать следующие основные характеристики:

1. Передаточная функция.
2. Соответствующее дифференциальное уравнение.
3. Переходная функция.
4. Весовая (импульсная переходная) функция.
5. АФЧХ и ЛФЧХ.
6. Реализация звена.

- **Усилительное звено не рассматривается вследствие его тривиальности.**

- **Инерционное звено.**

1. **Передаточная функция инерционного звена:**

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}; \quad \begin{array}{l} k - \text{коэффициент усиления;} \\ T - \text{постоянная времени.} \end{array}$$

2. **Дифференциальное уравнение инерционного звена:**

$$T \dot{x}(t) + x(t) = ku(t); \quad \text{Д.у. первого порядка;}$$

3. **Переходная функция инерционного звена:**

$$H(p) = W(p) \cdot 1(p) = \frac{k}{Tp + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k}{(Tp + 1)p};$$

$$H(t) = L^{-1}\{H(p)\} \stackrel{\text{По формуле вычетов}}{=} \operatorname{Res}\{H(p)\}\Big|_{p=-1/T} \cdot e^{-t/T} +$$

$$\operatorname{Res}\{H(p)\}\Big|_{p=0} \cdot 1(t) = \frac{k}{2Tp + 1}\Big|_{p=-1/T} \cdot e^{-t/T} + \frac{k}{1} \cdot 1(t) = k(1 - e^{-t/T});$$

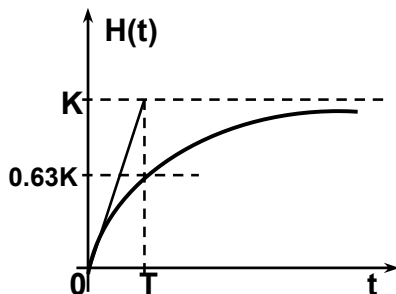


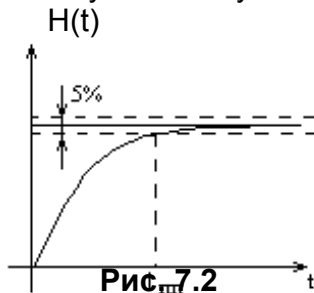
Рис. 7.1

Переходный процесс инерционного звена - экспоненциальный - типичный для систем первого порядка. Установившееся значение равно K . Касательная при $t=0$, очевидно, равна K/T . Поэтому касательная пересекает линию установившегося значения в точке $t=T$. Кроме того, $H(T) \approx 0.63K$.

Время переходного процесса инерционного звена

В автоматике принято считать время переходного процесса по достижении 5% окрестности установившегося значения.

Воспользуемся полученной переходной функцией, чтобы оценить это время.



$$H(t_{\text{пп}}) = k(1 - e^{-t_{\text{пп}}/T}) = 0.95k;$$

$$e^{-t_{\text{пп}}/T} = 0.05;$$

$$-t_{\text{пп}} \left(\frac{1}{T} \approx -2.3 \right) \quad \boxed{t_{\text{пп}} \approx (2-3)T;}$$

В автоматике принято оценивать время переходного процесса по максимальной из постоянных времени: $t_{\text{пп}} = (2-3)T_{\text{max}}$, то есть учитывать *главную* постоянную времени, фактически аппроксимируя исследуемый блок инерционным звеном, так как все остальные составляющие переходного процесса будут заканчиваться задолго до этого. Так определённое время переходного процесса не зависит от коэффициента усиления.

Пример 2. Для передаточной функции $W(p) = \frac{k}{(0.1p + 1)(10p + 1)}$

Общее время переходного процесса будет примерно (20-30)сек.

4. Весовая функция инерционного звена.

$$h(p) = W(p) = \frac{k}{Tp + 1}; \quad h(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T};$$

Весовая функция $h(t)$ равна производной от переходной $H(t)$ и представляет собой реакцию на δ -функцию.

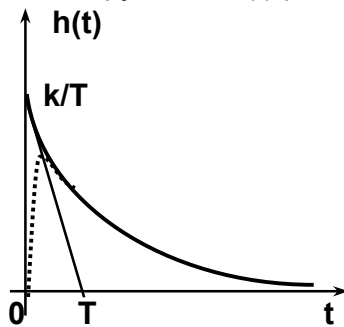


Рис. 7.3

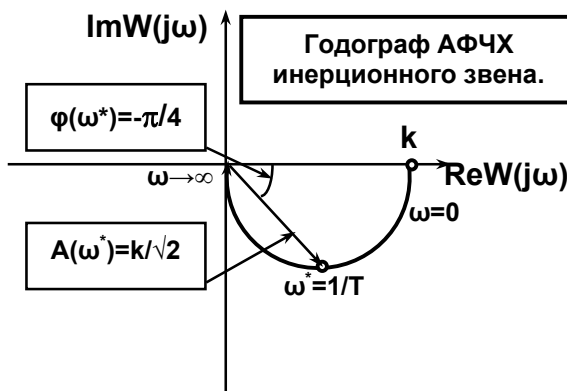
Касательная при $t=0$ равна $-k/T$.

Поэтому касательная пересекает линию установившегося значения 0 в точке $t=T$. Характерен скачок амплитуды в начальный момент времени, возникающий из-за наличия на входе δ -функции. Строго говоря, такого не может быть, и будет наблюдаться процесс, обозначенный пунктиром.

5. АФЧХ инерционного звена:

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{k(1 - Tj\omega)}{(Tj\omega + 1)(1 - Tj\omega)} = k \left(\frac{1}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1} \right) =$$

$$= k \sqrt{\frac{T^2\omega^2 + 1}{(T^2\omega^2 + 1)^2}} \cdot e^{-j \arctg T\omega} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \cdot e^{-j \arctg T\omega};$$



Годограф описывает полуокружность с наименьшей точкой на частоте $\omega^* = 1/T$, при этом фазовый сдвиг равен $-\pi/4$, а коэффициент усиления (АЧХ) равен $0.707k$. При изменении частоты от 0 до ∞ радиус-вектор АЧХ монотонно убывает от начального значения K , стремясь к 0.

Рис. 7.4

6. ЛАЧХ и ЛФЧХ инерционного звена:

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = 20 \lg k - 10 \lg(T^2\omega^2 + 1);$$

Эта трансцендентная функция является ЛАЧХ инерционного звена. Чтобы упростить использование ЛАЧХ, вводят понятие **асимптотических ЛАЧХ**, то есть кусочно-постоянных функций, не сильно отличающихся от истинных. То, что это оказывается эффективно реализуемым, показывает следующее рассуждение, справедливое, конечно, не только для инерционного звена, но и для любых более сложных ПФ.

Переход к асимптотической ЛАЧХ: заменяем истинную ЛАЧХ – ломаной асимптотической. Выделим области низких и высоких частот и по отдельности рассмотрим поведение ЛАЧХ в этих областях. После чего, оценим максимальную ошибку, возникающую на границе областей.

- ✓ Область низких частот: $T^2\omega^2 \ll 1$; т.е. $\omega \ll 1/T$; можно пренебречь выражением $T^2\omega^2$. Получаем: $L(\omega) = 20 \lg k$; Это горизонтальная прямая.
- ✓ Область высоких частот: $T^2\omega^2 \gg 1$; т.е. $\omega \gg 1/T$; можно пренебречь 1 в сравнении с выражением $T^2\omega^2$. Получаем $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T\omega$. Уравнение прямой с наклоном -20дб./декаду в логарифмических координатах.

Излом асимптотической ЛАЧХ имеется на $\omega_c = 1/T$. Вычислим **max.** ошибку.

Максимум достигается в точке $1/T$. Заметим, что ошибка асимптотической ЛАЧХ апериодического звена не зависит от k и T и равна примерно -3дб.

$$\Delta L = 20 \lg k - 20 \lg k + 10 \lg T^2\omega^2 + 1 = 10 \lg 2 \text{дб.} \approx -3.03 \text{дб.} \quad (1/\sqrt{2} \text{ раз} \approx 0.707).$$

Уровень -3дб. принято также считать границей полосы пропускания.

Логарифмические частотные характеристики инерционного звена.

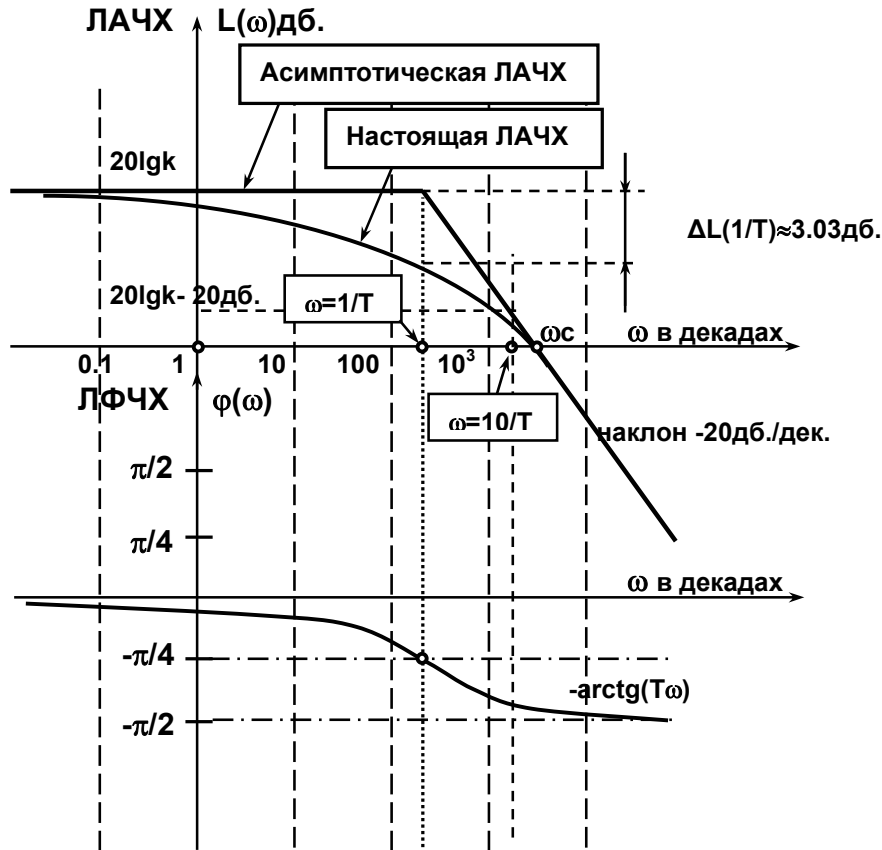
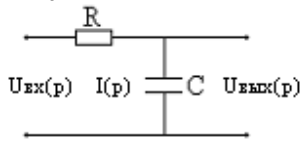


Рис. 7.5 Ноль частоты находится слева в $-\infty$ (логарифмический масштаб).

7. Реализация инерционного звена.

Убедимся, что простейшая "интегрирующая RC цепочка" на самом деле является инерционным звеном по напряжению.



Обойдем контур и вычислим операторное выражение для выходного напряжения через входное. Затем получим ПФ.

Рис. 7.6

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{U_{\text{ВХ}}(p)}{R + 1/pC} \cdot \frac{1}{pC} = \frac{U_{\text{ВХ}}(p)}{RCp + 1};$$

$$W(p) = \frac{1}{RCp + 1} = \frac{k}{Tp + 1}; \text{ где } T = RC; K = 1.$$

• **Лекция 8.**

Имеется также общий метод получения реализаций передаточных функций с помощью операционных усилителей.

Идеальный инвертирующий операционный усилитель.

- $k = -\infty;$
- $R_{вх.} = 0;$
- $R_{вх.} = \infty;$
- $S_{вх.} = 0.$
- Идеальная АФЧХ;
- Идеально линейная амплитудная характеристика.

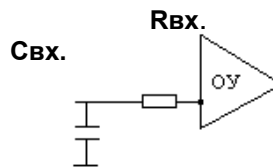


Рис. 8.1

Охватим такой инвертирующий усилитель отрицательной обратной связью, причём **Z(p)** и **r(p)** - произвольные операторные выражения, то есть любые цепи, в том числе, активные. Вследствие бесконечного усиления операционного усилителя, бесконечного входного сопротивления и отсутствия входной ёмкости напряжение на его входе и входной ток должны быть равны нулю.

Поэтому:

Рис. 8.2

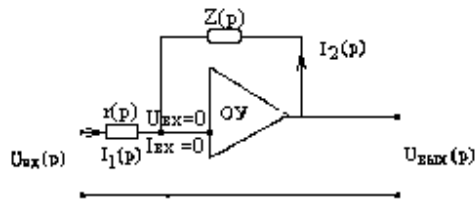
$I_1(p) + I_2(p) = 0;$ (сумма токов в узле);

$U_{вх}(p) = I_1(p)r(p);$ (обход вх. контура);

$U_{вых}(p) = I_2(p)Z(p);$ (обход контура

Если выбрать активные компоненты:

$r(p) = r; Z(p) = R$ - резисторы, тогда сопротивление с учётом ООС будет $r_{вх} = r;$



ООС);

Операционный усилитель, охваченный комплексной ООС.

входное равно:

Вычислим передаточную функцию по напряжению: $W(p) = U_{вых}(p)/U_{вх}(p).$

$W(p) = U_{вых}(p)/U_{вх}(p) = (I_2(p)Z(p))/(I_1(p)r(p)) = -R/r;$ Выбором резисторов можно задать практически любой отрицательный коэффициент усиления.

Но это лишь частный случай общей формулы (8.1), имеющийся для усилителя с несколькими входами (если имеется несколько входных цепей $r_i(p)$):

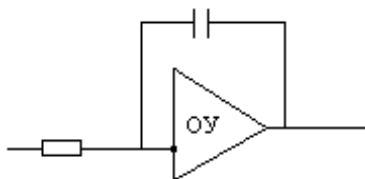
$$W_i(p) = - \sum_{i=1,k} \frac{Z(p)}{r_i(p)} ; \tag{8.1}$$

Пример 3. Инвертирующий интегратор.

Пусть в цепи ООС находится конденсатор с ёмкостью C, а на входе - активный элемент - резистор R. В соответствии с (27) получим $W(p):$

$W(p) = - 1/(pCR) = -k/p;$

Это - инвертирующий интегратор.

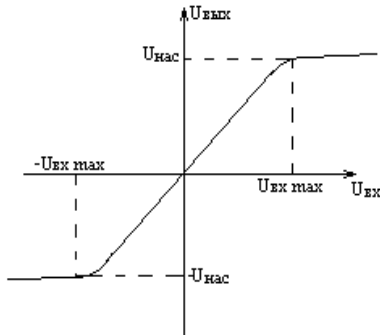


- ✓ Интегратор может иметь начальные условия. Это есть не что иное, как начальный заряд емкости.
- ✓ Ограничения линейного диапазона ОУ сказывается на качестве его работы при больших сигналах:

✓ Существенное значение на качество интегратора оказывает частотная характеристика ОУ. Узкая полоса пропускания ухудшает его работу.

Рис. 8.3

Узкая полоса пропускания ухудшает его работу.



Вообще, основными факторами, нарушающими идеальную работу схемы на ОУ являются:

- конечность усиления;
- ненулевая входная ёмкость;
- ненулевое выходное и небесконечное входное сопротивление;
- неидеальная частотная характеристика;
- нелинейная амплитудная характеристика.

Рис. 8.4

стика.

• **Интегрирующее звено (интегратор).**

1. **Передачная функция интегрирующего звена:**

$$W(p) = \frac{k}{p}; \quad k - \text{коэффициент усиления.}$$

2. **Дифференциальное уравнение интегратора:**

$$\dot{x}(t) = ku(t); \quad \text{Д.у. первого порядка;}$$

$$\text{Общее решение: } x(t) = x(0) + \int_0^t ku(\tau)d\tau;$$

3. **Переходная функция инерционного звена:**

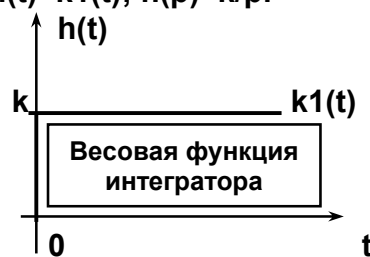
При $u(t)=1(t)$ и нулевых начальных условиях $H(t)=kt(t)$; $H(p)=k/p^2$.

4. **Весовая функция инерционного звена:**

При $u(t)=\delta(t)$ и нулевых начальных условиях $h(t)=k1(t)$; $h(p)=k/p$.



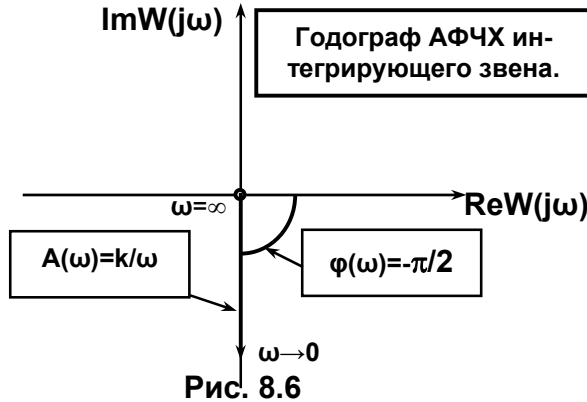
Рис. 8.5



5. АФЧХ интегратора.

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega} = \frac{k}{\omega} \cdot e^{-j\pi/2};$$

Интегратор ослабляет высокие частоты пропорционально частоте и неограниченно усиливает низкие частоты. Фазовый сдвиг постоянен: $-\pi/2$



Годограф расположен вдоль отрицательной мнимой оси. Фазовый сдвиг равен $-\pi/2$, а радиус - вектор АЧХ при изменении частоты от 0 до ∞ монотонно убывает от значения ∞ , стремясь к 0. Коэффициент усиления бесконечно малых частот неограничен (теоретически).

Рис. 8.6

6. Логарифмические частотные характеристики интегратора.

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega;$$

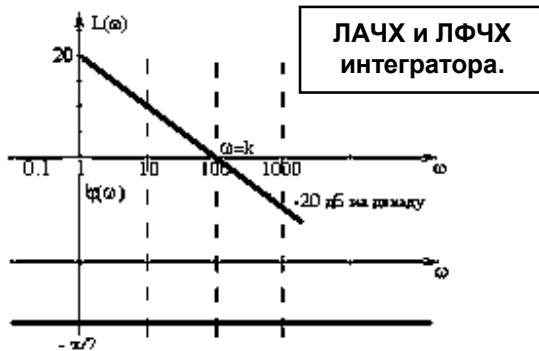


График ЛАЧХ имеет наклон -20дБ./декаду и проходит через рез точку 0дБ. на частоте $\omega=k$.

Рис. 8.7

7. Реализация интегрирующего звена.

Выше в этой лекции уже рассмотрена реализация интегратора с помощью операционного усилителя.

Чтобы получить интегратор можно также взять *инерционное звено с очень большой постоянной времени T и большим K.*

$$\text{Если } T\tau \gg 1, \text{ то } W(p) = \frac{k_{\text{инерц.}}}{T_{\text{инерц.}}p + 1} \approx \frac{k_{\text{инерц.}}}{T_{\text{инерц.}}p} = \frac{k}{p};$$

Точность работы такого интегратора увеличивается с ростом частоты. Именно поэтому термин "интегрирующая RC цепочка" имеет смысл.

До того, как перейти к дифференцирующему и форсирующим звеньям, дадим определение физической реализуемости передаточной функции.

Передаточная функция является физически реализуемой, если существует конкретное устройство или программа, которые позволяют реально получить или вычислить выход блока с такой передаточной функцией при реальных типовых входных сигналах и их комбинациях.

Отметим сразу, какие факторы могут воспрепятствовать физической реализуемости:

- ✓ нарушение причинности - выходной сигнал появляется раньше входного;
- ✓ нереализуемая частотная характеристика, например, не стремящаяся к нулю при бесконечно больших частотах;
- ✓ появление на выходе блока бесконечных значений сигналов в конечные моменты времени при подаче физически реализуемых сигналов.

Физически нереализуемой заведомо является передаточная функция с порядком числителя большим порядка знаменателя. Строго говоря, физически нереализуемой является и ПФ с порядком числителя равным порядку знаменателя. В первом случае после деления числителя на знаменатель выделяется, помимо прочего, несколько идеальных дифференцирующих звеньев. Во втором случае при делении числителя на знаменатель выделяется усилительное звено. Заметим, что даже идеальный усилитель не может быть физически реализован, не говоря уже об идеальном дифференцирующем звене, так как в обоих случаях АЧХ не стремятся к нулю при росте частоты.

Замечание: Для двух звеньев, связанных следующим соотношением:

$W_1(p) = 1 / W_2(p)$ справедливы следующие тривиальные равенства:

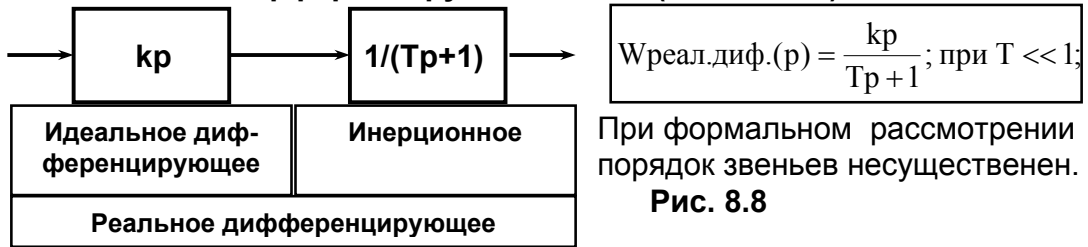
- ✓ $W_1(j\omega) = 1 / W_2(j\omega)$; то есть $АФЧХ_1 = 1 / АФЧХ_2$;
- ✓ $L_1(\omega) = -L_2(\omega)$;
- ✓ $\varphi_1(\omega) = -\varphi_2(\omega)$;
- ✓

В силу этих очевидных равенств а также замечаний к (12) не будем отдельно рассматривать следующие звенья (оставив это на самостоятельное изучение):

- дифференцирующее,
- форсирующее,
- форсирующее 2-го порядка.

Перейдем к часто используемому, но "нетиповому" **реальному дифференцирующему звену**. Причина, по которой оно рассматривается, заключается в физической нереализуемости идеального дифференцирующего звена, при том, что сама операция дифференцирования часто встречается при описании процессов разной природы. Реальное дифференцирующее звено является соединением двух типовых звеньев - идеального дифференцирующего и инерционного, вместе приближённо описывающих операцию идеального дифференцирования. Покажем, что в любом конечном диапазоне рабочих частот характеристики такого звена могут быть сколь угодно близки к идеальным.

• **Реальное дифференцирующее звено (нетиповое).**



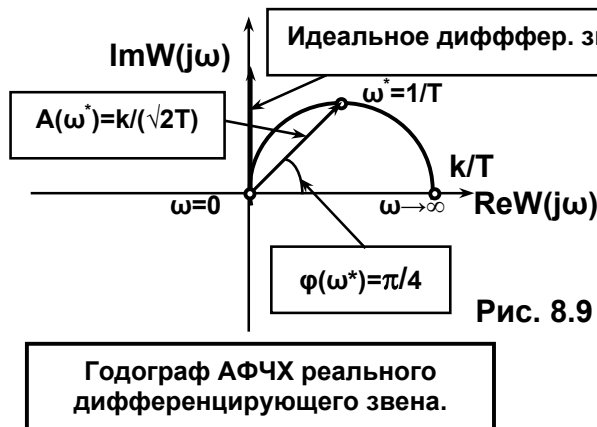
При формальном рассмотрении порядок звеньев несущественен.

Рис. 8.8

kp – блок идеального дифференцирования; **1/(Tp+1)** – инерционное звено. Построим АФЧХ реального дифференцирующего звена.

$$W(j\omega) = \frac{kj\omega}{Tj\omega + 1} = \frac{kj\omega(1 - Tj\omega)}{(Tj\omega + 1)(1 - Tj\omega)} = k \left(\frac{T\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} + j \frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1} \right) =$$

$$= k \sqrt{\frac{\omega^2 (T^2\omega^2 + 1)}{(T^2\omega^2 + 1)^2}} \cdot e^{j\pi/2 - j\text{arctg}T\omega} = \frac{k\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \cdot e^{j\pi/2 - j\text{arctg}T\omega};$$



Годограф описывает полуокружность с радиусом, стремящимся к ∞ при T стремящимся к 0 . При этом годограф прижимается к положительной мнимой полуоси и становится практически неотличим от годографа идеального дифференцирующего звена. Частота $\omega^* = 1/T$ считается максимальной, при которой

Рис. 8.9

еще реальное дифференцирующее звено работает "почти как идеальное".

При достаточно низких частотах реальное дифференцирующее звено близко к идеальному.

Реализация реального дифференцирующего звена :

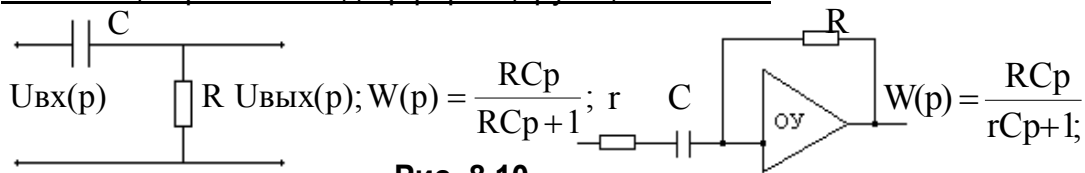


Рис. 8.10

Любая из этих схем (дифференцирующая цепочка или ОУ с обратной связью) имеет передаточную функцию по напряжению, совпадающую с ПФ реального дифференцирующего звена.

• Лекция 9.

Выше рассмотрены все типовые звенья первого порядка .

Общее для всех звеньев первого порядка :

- Наклон ЛАЧХ ± 20 дБ/дек
- Максимальный поворот фазы $\pm \pi/2$

Имеется два типовых звена второго порядка: форсирующее 2-го порядка и колебательное. Форсирующее звено 2-го порядка равно сумме дифференцирующего 2-го порядка, идеального дифференцирующего и усилительного. Поэтому интерес представляет колебательное звено.

• Колебательное звено

Позволяет описать присущий многим системам элемент колебательности. Наиболее близкий математический аналог – математический маятник с фиксированным коэффициентом затухания.

1. Передаточная функция колебательного звена:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dTp + 1};$$

k - коэффициент усиления;
T - постоянная времени;
d - коэффициент (декремент) затухания.

Если дискриминант квадратного трёхчлена $D=d^2-1>0$, то трёхчлен может быть разложен на произведение двух простых скобок, соответствующих инерционным звеньям. Этот случай неинтересен, поэтому будем полагать: $d<1$, при этом полином имеет два комплексно-сопряжённых корня.

2. Дифференциальное уравнение колебательного звена:

$$T^2 \ddot{x}(t) + 2dT \dot{x}(t) + x(t) = ku(t); \quad \text{Д.у. второго порядка;}$$

3. Переходная функция колебательного звена:

$$H(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p}; \quad H(t) = k(1 - e^{-\frac{d}{T}t}) \left(\cos\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t\right) + \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t\right) \right);$$

Переходная функция имеет достаточно сложный вид, но наиболее характерно то, что имеется экспоненциальное затухание переходного процесса с коэффициентом $-d/T$ а также колебательность с частотой $\omega = \sqrt{1-d^2}/T$.

От знака d зависит наличие затухания или, наоборот, увеличения амплитуды колебаний. Сами колебания будут лишь в том случае, если $d<1$.

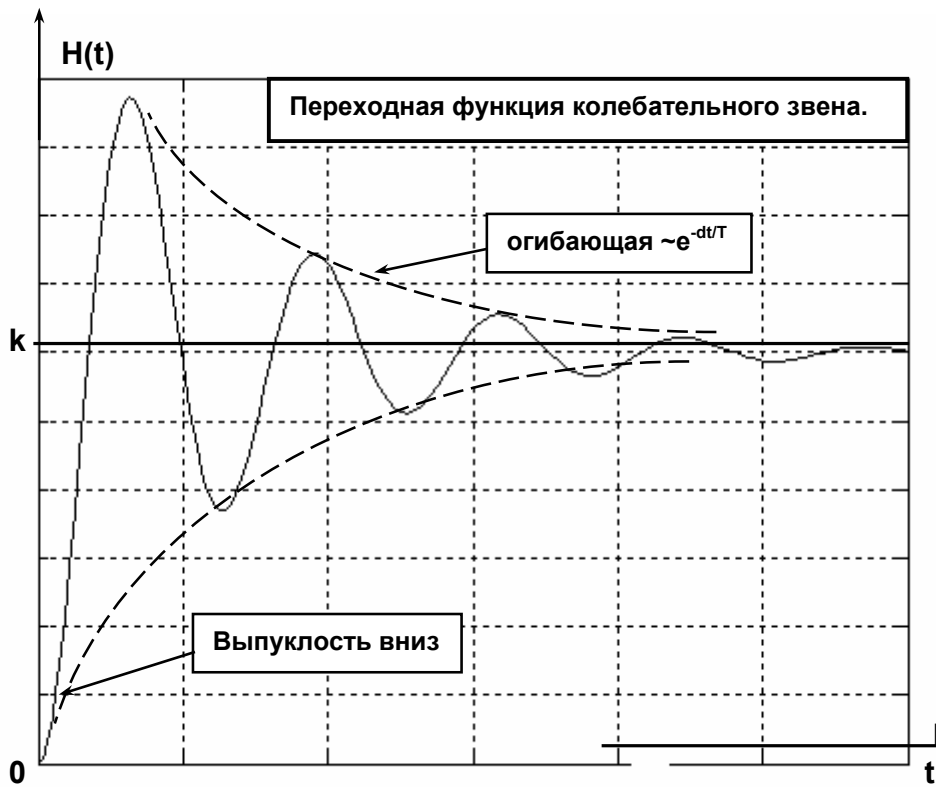


Рис. 9.1

4. Весовая функция колебательного звена.

$$h(p) = W(p); \quad h(t) = ke^{-\frac{d}{T}t} \cdot \frac{1}{T\sqrt{1-d^2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t\right);$$

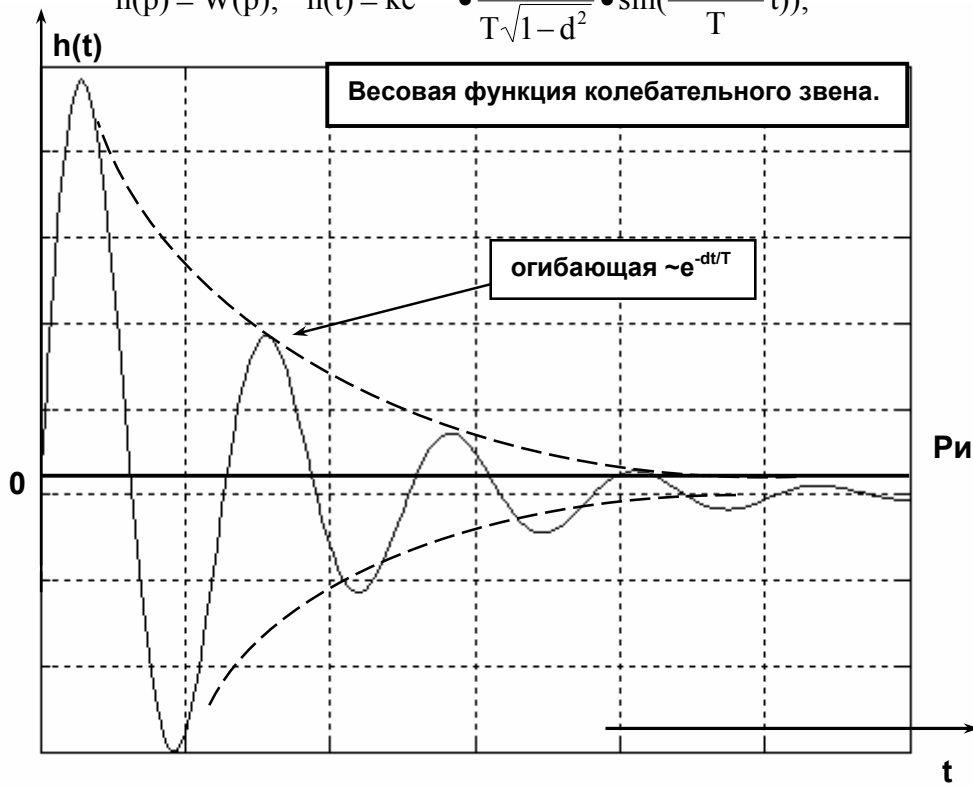


Рис. 9.2

Характерным является то, что период колебаний зависит от затухания: при **увеличении затухания период колебаний увеличивается**. Правда, эта зависимость не очень ярко выражена при малых $d \ll 1$. Например, при $d=0.3$ изменение частоты колебаний составляет $\approx 5\%$. Поэтому обычно зависимостью частоты колебаний от затухания пренебрегают.

5. АФЧХ колебательного звена:

$$W(j\omega) = \frac{k}{-T^2\omega^2 + 2dTj\omega + 1} = \frac{k(1 - T^2\omega^2 - 2dTj\omega)}{(1 - T^2\omega^2 + 2dTj\omega)(1 - T^2\omega^2 - 2dTj\omega)} =$$

$$= k \left(\frac{1 - T^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} - j \frac{2dT\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} \right) =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}} \cdot e^{-j \arctg \frac{2dT\omega}{1 - T^2\omega^2}};$$



Рис. 9.3

Годограф описывает кривую, заходящую в третий квадрант. На частоте $\omega^* = 1/T$ имеется фазовый сдвиг $-\pi/2$, но максимум амплитуды достигается на **меньшей** $\omega_M = \sqrt{1 - 2d^2} \cdot \omega^*$. Эта разница невелика, поэтому, также, как в случае с частотой колебаний, считают эти частоты практически равными. Величина самого максимума амплитуды $A(\omega)$ также мало отличается от $A(\omega^*)$:

$$A(\omega^*) = \sqrt{1 - d^2} \cdot A(\omega_M).$$

6. ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена:

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}} =$$

$$= 20 \lg k - 10 \lg ((1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2);$$

Эта трансцендентная функция является ЛАЧХ колебательного звена. Чтобы упростить использование ЛАЧХ, рассмотрим асимптотическую ЛАЧХ. **Переход к асимптотической ЛАЧХ:** заменяем истинную ЛАЧХ – ломаной асимптотической. Выделим области низких и высоких частот и по отдельности рассмотрим поведение ЛАЧХ в этих областях. После чего, оценим максимальную ошибку, возникающую на границе областей.

- ✓ Область низких частот: $T^2\omega^2 \ll 1$; т.е. $\omega \ll 1/T$; можно пренебречь выражением $T^2\omega^2$. Получаем: $L(\omega) = 20 \lg k$; Это горизонтальная прямая.

- ✓ Область высоких частот: $T^4\omega^4 \gg 1$; т.е. $\omega \gg 1/T$; можно пренебречь всеми остальными членами в сравнении с выражением $T^4\omega^4$. Получаем $L(\omega) = 20 \lg k - 40 \lg T\omega$. Уравнение прямой с наклоном **-40дб./декаду** в логарифмических координатах.

Излом асимптотической ЛАЧХ имеется на $\omega_c = 1/T$. Вычислим **max.** ошибку. Здесь имеется существенное отличие от поведения ЛАЧХ остальных звеньев, в частности, инерционного: в районе частоты $1/T$ имеется максимум, из-за чего поведение асимптотической ЛАЧХ может в этой области существенно отличаться от истинной. В инженерной практике используют такой подход: вначале рисуют асимптотическую ЛАЧХ а затем добавляют "горб" в точке максимума. Аналитическое исследование выявляет следующее:

- вообще горб имеется лишь при $d < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$;
- при $1/\sqrt{2} \approx 0.707 < d < 1$ ЛАЧХ монотонно убывает; при этом максимальное отклонение асимптотической ЛАЧХ от истинной достигается в точке $1/T$: $\Delta L = 20 \lg k - 20 \lg k + 10 \lg 4d^2 = 20 \lg 2d \approx 6.06$ дб.(max.)
- максимум ЛАЧХ достигается в точке $\omega_M = \sqrt{1 - 2d^2} \cdot \frac{1}{T}$;
- величина максимума $L_M = 20 \lg k - 20 \lg(2d\sqrt{1 - 2d^2})$;
- при увеличении затухания максимум смещается влево;

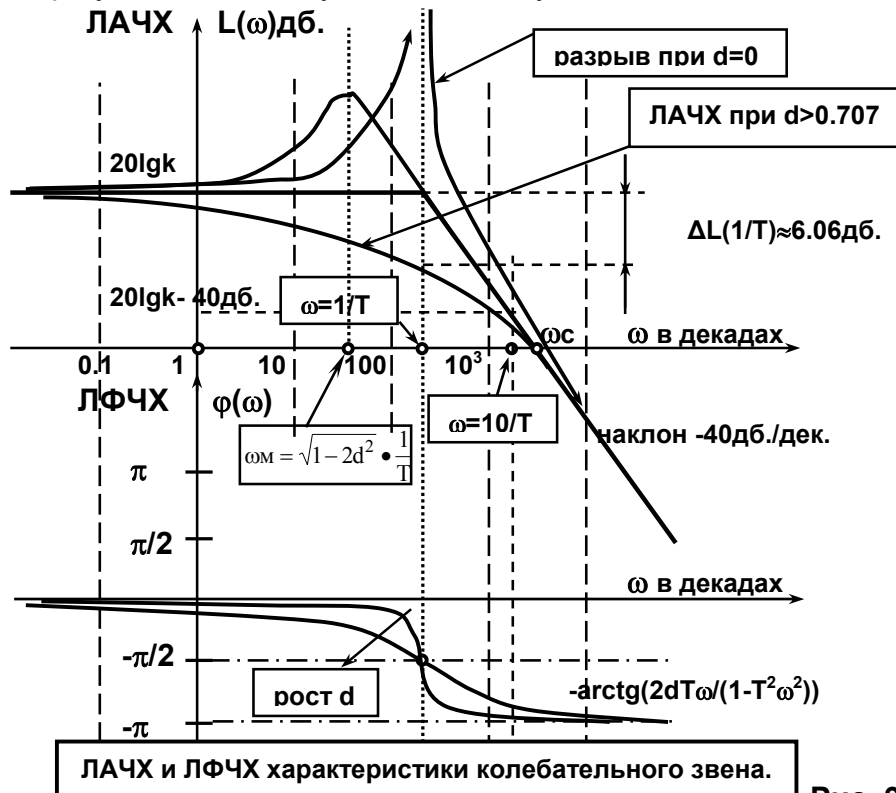


Рис. 9.4

7. Реализация колебательного звена.

Следующая схема обладает передаточной функцией колебательного звена по напряжению.

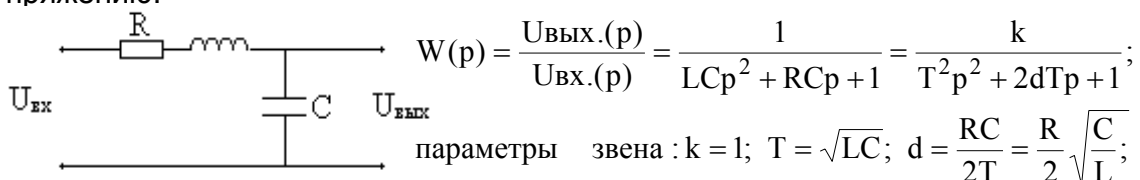


Рис. 9.5

Таким образом, звено второго порядка имеет наклон ЛАЧХ ± 40 дБ на декаду и максимальный поворот фазы $\pm\pi$.

Важнейший итог: любая передаточная функция может быть представлена в виде последовательного или параллельного соединения простейших типовых звеньев 1-го или 2-го порядка, каждое из которых даёт излом ЛАЧХ на ± 20 или ± 40 дБ/дек.

ФЧХ получают при этом приращение $\pm \pi/2$ или $\pm \pi$ соответственно.

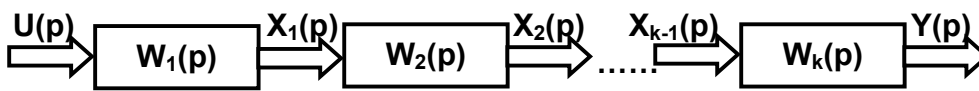
Использование асимптотических ЛАЧХ является основным (наиболее удобным) инструментом в исследовании многих вопросов анализа и синтеза САУ.

• **Лекция 10.**

Правила преобразования структурных схем.

Следующие правила являются элементарно-проверяемыми свойствами структурных схем. Но на их основе можно любую, сколь угодно сложную структурную схему преобразовать и упростить до требуемого вида.

- **Передачные функции последовательно соединенных звеньев перемножаются.**



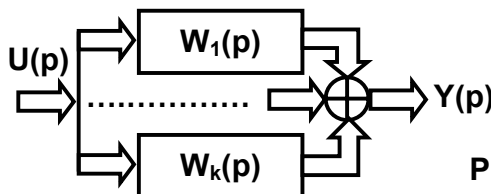
$X_1(p) = W_1(p)U(p); \dots Y(p) = W_k(p)X_{k-1}(p).$ **Рис. 10.1**

Последовательно подставляем выходные сигналы, выражая их через входные:

$$Y(p) = W_k(p) \cdot \dots \cdot W_1(p)U(p) = \prod_{i=1,k} W_i(p) \cdot U(p);$$

поэтому: $W_{\text{посл.}}(p) = W_k(p) \cdot \dots \cdot W_1(p) = \prod_{i=1,k} W_i(p);$ **(10.1)**

- **Передачные функции параллельно соединенных звеньев складываются.**



$$Y(p) = W_1(p)U(p) + \dots + W_k(p)U(p) = (W_1(p) + \dots + W_k(p)) \cdot U(p);$$

Рис. 10.2

поэтому: $W_{\text{парал.}}(p) = W_1(p) + \dots + W_k(p) = \sum_{i=1,k} W_i(p);$ **(10.2)**

- **Передачная функция участка с обратной связью - передачная функция замкнутой системы.**

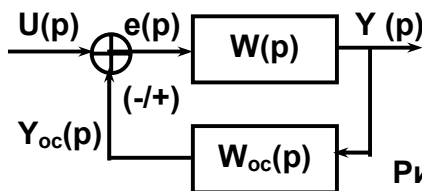


Рис. 10.3

Обозначим все сигналы:
 $Y(p) = W(p)e(p); Y_{oc}(p) = W_{oc}(p)Y(p);$
 $e(p) = U(p) - Y_{oc}(p) = U(p) - W_{oc}(p)Y(p);$
 исключим $e(p)$, выразим выход через вход: $Y(p) = W(p)(U(p) - W_{oc}(p)Y(p));$
 $Y(p) \cdot (1 \pm W(p)W_{oc}(p)) = W(p) \cdot U(p);$

поэтому:

$$W_{зс}(p) = \frac{W(p)}{1 \pm W(p)W_{ос}(p)}; \quad (10.3)$$

Знак **плюс** или **минус** зависит от того, **отрицательная** или **положительная** обратная связь имеется в замкнутой системе.

- **Перенос узла через блок.**

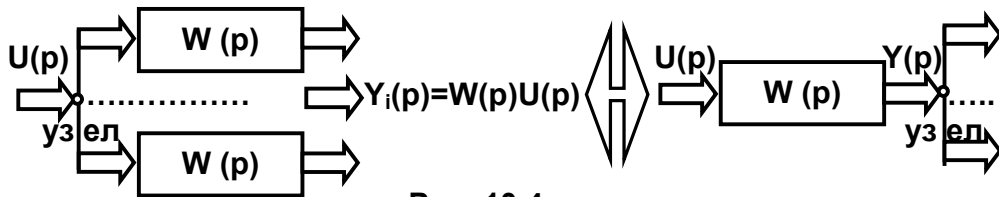


Рис. 10.4

Эти две схемы полностью эквивалентны, но в первой имеется множество блоков с одинаковой передаточной функцией, что неэкономно.

- **Перенос внешнего воздействия вперед и назад через блок.**

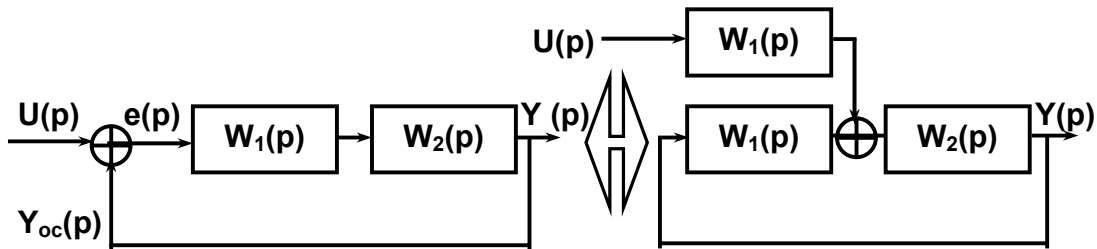


Рис. 10.5

Эти две структурные схемы полностью эквивалентны с точки зрения $W_{зс}(p)$.

- **Перенос места включения обратной связи.**

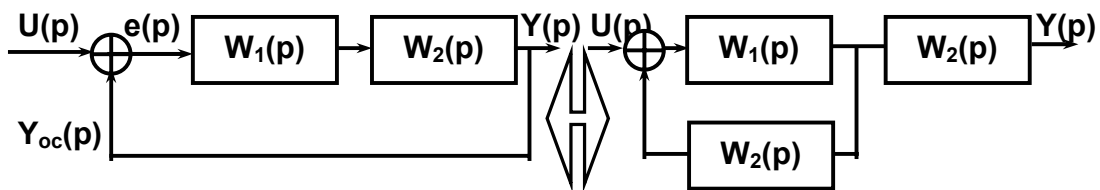


Рис. 10.6

Эти две структурные схемы полностью эквивалентны с точки зрения $W_{зс}(p)$.

Частные передаточные функции.

В общем случае можно выразить любой выходной сигнал через любой входной сигнал при условии, что все остальные входные сигналы равны 0 и имеются 0 начальные условия.

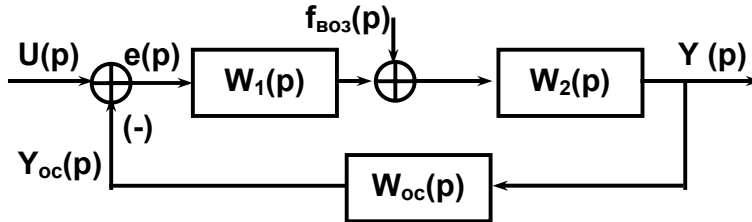


Рис. 10.7

Это есть не что иное, как принцип суперпозиции, вытекающий из линейности. Например, выходной сигнал $Y(p)$ и сигнал ошибки $e(p)$ выражаются так:

$$Y(p) = W_{zc}(p)U(p) + W_f(p)f(p); \quad e(p) = W_e(p)U(p) + W_{ef}(p)f(p); \quad (10.4)$$

Помимо входного и выходного сигналов в системе, важными являются сигналы ошибки $e(t)$, возмущающее воздействие $f_{воз}$, сигнал обратной связи $Y(p)$.

По отношению к этим сигналам имеется несколько часто использующихся передаточных функций:

- **Главная передаточная функция или передаточная функция замкнутой системы:**

$$W_{zc}(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p)}; \quad (10.5)$$

- **Передаточная функция по ошибке.**

$$W_e(p) = \frac{e(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p)}; \quad (10.6)$$

$W_e(p)$ - позволяет выразить ошибку $e(t)$ в системе при известном входном воздействии.

- **Передаточная функция по возмущению (от возмущения к выходу).**

$$W_f(p) = \frac{Y(p)}{f(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p)}; \quad (10.7)$$

Эта передаточная функция позволяет выразить влияние возмущения на выходной сигнал.

- Передаточная функция по ошибке и возмущению (от возмущения к ошибке).

$$W_{ef}(p) = \frac{e(p)}{f(p)} = \frac{-W_2(p)W_{oc}(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p)}; \quad (10.8)$$

- Передаточная функция по обратной связи.

$$W_{Y_{oc}}(p) = \frac{Y_{oc}(p)}{U(p)} = \frac{W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_{oc}(p)}; \quad (10.9)$$

Отметим, что передаточная функция по ошибке $W_e(p)$ есть основное средство исследования точности САУ. Разложение этой передаточной функции в ряд позволит нам впоследствии в явном виде получить коэффициенты ошибок.

- ✓ Рассмотрим три примера, демонстрирующих, что происходит в типичных случаях при охвате звена отрицательной обратной связью.

Пример 4. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из инерционного звена с коэффициентом усиления K и постоянной времени T и цепи ООС с коэффициентом K_{oc} .

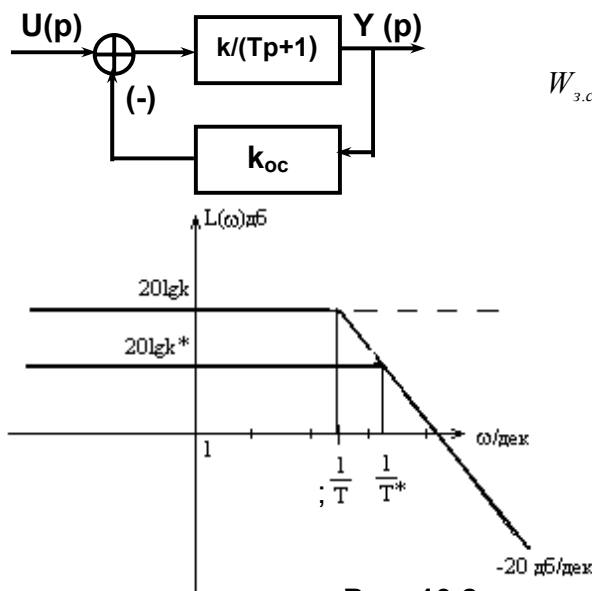


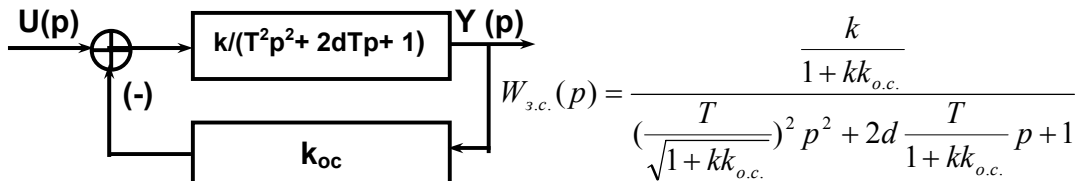
Рис. 10.8

Охват инерционного звена обратной связью позволяет уменьшить “инерционность этого звена”. Видно, что коэффициент усиления уменьшается во столько же раз, во сколько уменьшается постоянная времени. Поэтому полоса пропускания расширяется во столько же раз, во сколько уменьшается коэффициент усиления.

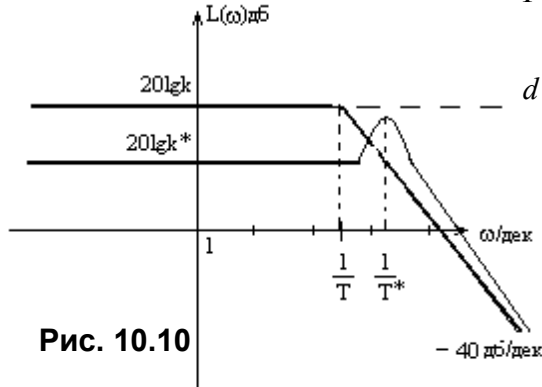
$$\begin{aligned}
 W_{з.с.}(p) &= \frac{\frac{k}{Tp+1}}{1 + \frac{kk_{oc.}}{Tp+1}} = \frac{k}{Tp+1+kk_{oc.}} = \\
 &= \frac{k}{1+kk_{oc.}} \cdot \frac{1}{\frac{T}{1+kk_{oc.}}p+1} = \frac{k^*}{T^*p+1}; \\
 k^* &= \frac{k}{1+kk_{oc.}}; \\
 T^* &= \frac{T}{1+kk_{oc.}}.
 \end{aligned}$$

Пример 5.

Охватываем отрицательной обратной связью колебательное звено.

**Рис. 10.9**

Пусть в исходном звене затухание велико: $d > 0.707$, следовательно, резонанса нет.

**Рис. 10.10**

$$k^* = \frac{k}{1 + k k_{о.с.}};$$

$$T^* = \frac{T}{\sqrt{1 + k k_{о.с.}}};$$

$$d^* = \frac{d}{1 + k k_{о.с.}};$$

Колебательное звено осталось колебательным, но **изменилось k, T и d.**

Причём, в отличие от инерционного звена, постоянная времени и коэффициент усиления уменьшаются в **разное** количество раз. При увеличении глубины ООС уменьшается коэффициент затухания, и при $d^* < 0.707$ на ЛАЧХ появляется горб - резонанс, которого не было у исходного звена.

Кроме того, так как постоянная времени и коэффициент усиления уменьшаются неодинаково, не получается, как в инерционном звене, что полоса пропускания расширяется во столько же раз, во сколько уменьшается коэффициент усиления. Причина отличия - более высокий наклон ЛАЧХ.

Вывод: Охват ООС блока с наклоном ЛАЧХ 40 дБ и выше приводит к тому, что на частотах, соответствующих излому ЛАЧХ, появляется склонность к резонансу (колебательность).

Пример 6.

Практически то же самое будет при обхвате двух инерционных звеньев. Этот случай проще всего представить на практике, как модель двухкаскадного усилителя с инерционностью в каждом каскаде, обусловленной паразитными ёмкостями и сопротивлениями.

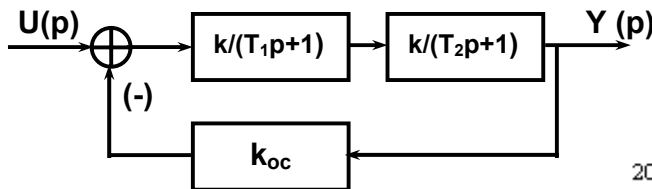


Рис. 10.11

$$W_{зс}(p) = \frac{k}{1 + k \cdot k_{oc}} \cdot \frac{1}{\frac{T_1 T_2}{1 + k \cdot k_{oc}} p^2 + \frac{(T_1 + T_2)}{1 + k \cdot k_{oc}} p + 1};$$

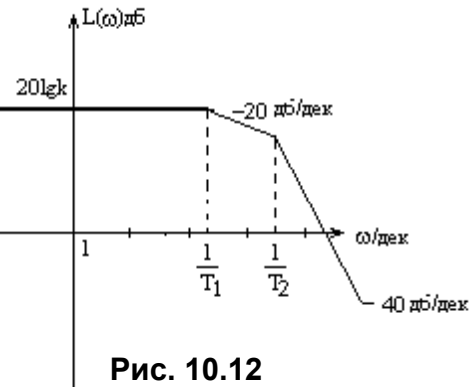


Рис. 10.12

Замкнутая обратной связью, система имеет типовую передаточную функцию колебательного звена. Но настоящим, не распадающимся на два инерционных, звено будет лишь при условиях малости декремента затухания. Приведём звено к стандартному виду:

$$\frac{T_1 T_2}{1 + k \cdot k_{oc}} = T^2; \quad \frac{(T_1 + T_2)}{1 + k \cdot k_{oc}} = 2dT, \text{ откуда :}$$

$$T = \sqrt{\frac{T_1 + T_2}{1 + k \cdot k_{oc}}} \text{ и } d = \frac{1}{2\sqrt{1 + k \cdot k_{oc}}} \cdot \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}};$$

При увеличении глубины ООС коэффициенты знаменателя передаточной функции замкнутой системы уменьшаются. Полученное выражение для **d** показывает, что замкнутая система может превратиться в колебательное звено (при **d < 1**), а при **d < 0.707** появляется резонанс - горб на ЛАЧХ.

Двухкаскадный (в общем случае многокаскадный) усилитель (ОУ) в каждом каскаде имеет излом ЛАЧХ, т.е. каждый каскад в простейшем случае можно считать инерционным звеном. Охват такого усилителя обратной связью может привести к резонансам на частотной характеристике и общей склонности к “звону”- резонансным явлениям. Поэтому в операционном усилителе имеются специальные дополнительные цепи коррекции для борьбы с тим эффектом. Идея заключается во введении дифференцирующих звеньев с целью добиться **локального наклона ЛАЧХ -20дб**. и свести рассмотрение к случаю, фактически, инерционного звена.

- Лекция 11.

Многомерные САУ со многими входами и выходами.

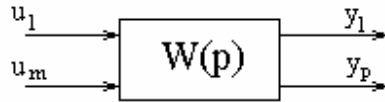


Рис. 11.1
 $Y_i(p) = W_{ij}(p)U_j(p);$

Каждый выход выражается через каждый вход, если при этом на всех остальных входах нули, при этом $W_{ij}(p)$ – обычная передаточная функция. Введём два вектор-столбца: вектор входа $U(p)$ и вектор выхода $Y(p)$, компонентами которых являются одномерные входы и выходы:

$$U(p) = (U_1(p), U_1(p), \dots, U_m(p))^T \quad \text{и} \quad Y(p) = (Y_1(p), Y_1(p), \dots, Y_p(p))^T$$

По линейности, в соответствии с принципом суперпозиции:

$$Y_i(p) = \sum_{j=1, m} W_{ij}(p) \cdot U_j(p); \quad (11.1)$$

В векторно-матричном виде:

$$Y(p) = W(p)U(p); \quad \text{– векторный вид} \quad (11.2)$$

$W(p) = \{W_{ij}(p)\}$ называется передаточной матрицей.

При последовательном соединении двух и более многомерных блоков с передаточными матрицами $W_{ij}(p)$ (число выходов первого блока должно быть равно числу входов второго) передаточные матрицы перемножаются, однако, так как матрицы, вообще говоря, не переставимы (не коммутируют), то:

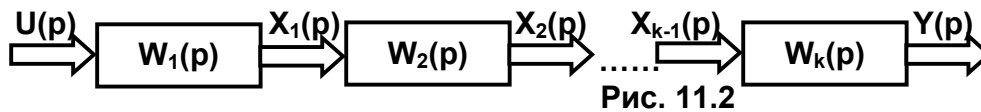


Рис. 11.2

$W(p) = W_2(p)W_1(p) \neq W_1(p)W_2(p)$, тем более, при большем числе матриц.

Точно так же можно получить формулы для параллельного соединения, соединения с обратной связью и более сложных структурных схем. Однако дальнейшее использование передаточных матриц затруднено тем фактом, что **использование частотных характеристик блока со многими входами и выходами чрезвычайно трудоемко (число ЛАЧХ равно $m \cdot p$).**

Вместо этого целесообразно многомерные системы рассматривать в виде соответствующих систем дифференциальных уравнений и развивать методы связанные с использованием дифференциальных уравнений, а не частотных характеристик.

В общем случае система линейных дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \\ y(t) = Cx(t) + Du(t); \end{cases} \quad (11.3)$$

Имеется три векторных пространства \mathbf{U} , \mathbf{Y} , \mathbf{X} размерностей m , p и n . В каждый момент времени все сигналы принадлежат одному из этих пространств.

$u(t) \in \mathbf{U}$ - вектор входа; $u(t) = (u_1(t) \dots u_m(t))^T$;
 $y(t) \in \mathbf{Y}$ - вектор выхода; $y(t) = (y_1(t) \dots y_p(t))^T$;
 $x(t) \in \mathbf{X}$ - вектор состояния; $x(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))^T$.
 n – порядок дифференциального уравнения объекта.

A – матрица ($n \times n$);

B – матрица ($n \times m$);

C – матрица ($p \times n$);

D – матрица ($p \times m$).

Вектор состояния $x(t)$ является "внутренним состоянием объекта", достаточным для полного описания поведения этого объекта. Вводят понятие пространства состояний \mathbf{X} . Его размерность является мерой сложности объекта. Например, если порядок дифференциального уравнения некоторого объекта равен n , то ему соответствует система вида (11.3) порядка n (см. Лекцию 4). Но вид (11.3) является более общим (так как имеется множество входов и выходов, кроме того, матрицы A, D, C, D - матрицы общего вида, а не специального, как в Лекции 4).

Замечание 1: В рамках системы (11.3) чрезвычайно удобно описывать нестационарные, т.е. зависящие от времени объекты. При этом матрицы $A(t), B(t), C(t), D(t)$ зависят от времени, что соответствует переменным коэффициентам дифференциальных уравнений.

Замечание 2: В системе (11.3), второе уравнение также можно понимать, как уравнение, описывающее косвенное измерение величины $x(t)$ некоторым датчиком. Системе (11.3) соответствует передаточная матрица (см. (6.2)):

$W(p) = [C(pE - A)^{-1}B + D]$ – передаточная матрица.

Очень важно понять, что пространство состояний \mathbf{X} определено неоднозначно! Например, можно в (11.3) сделать замену базиса пространства состояний \mathbf{X} по формуле: $x = Tz$, где T - невырожденная матрица замены базиса. Тогда без изменения отображения вход-выход матрицы (11.3) преобразуются по формулам:

$A^* = T^{-1}AT$; $B^* = T^{-1}B$; $C^* = CT$; $D^* = D$; (преобразование подобия).

Передаточная матрица при этом не изменится: $W(p) = [C^*(pE - A^*)^{-1}B^* + D] = [CT(pE - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D]T = [CTT^{-1}(pE - A)^{-1}TT^{-1}B + D]T = [C(pE - A)^{-1}B + D]$.

E – единичная E

Система уравнений (11.3) позволяет удобно производить моделирование в векторном виде. На следующем рисунке приведена схема такого моделирования, все блоки являются векторными, в том числе, интегратор.

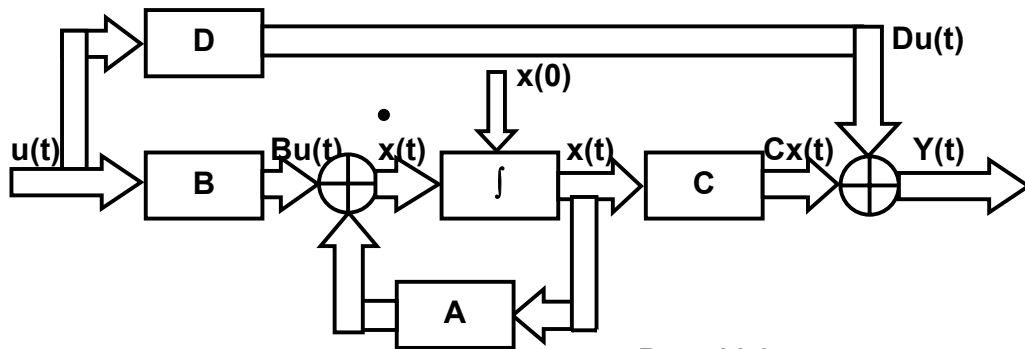


Рис. 11.3

Блок-схема моделирования векторной системы (39).

Рассмотрим последовательное соединение 2-х систем Σ_1 и Σ_2 типа (11.3) и покажем, что им соответствует система такого же вида, но вектор состояния будет иметь более высокую размерность.

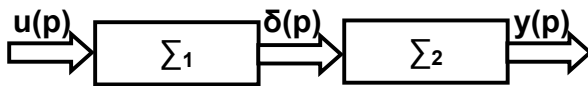


Рис. 11.4

Размерность выходного сигнала $\delta(t)$ системы Σ_1 должна быть равна размерности входного сигнала системы Σ_2 .

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \\ \delta(t) = Cx(t) + Du(t); \end{cases} \quad \Sigma_2: \begin{cases} \dot{\eta}(t) = F\eta(t) + G\delta(t); \\ y(t) = H\eta(t) + T\delta(t); \end{cases} \quad (11.4)$$

Все матрицы имеют соответствующие размерности, $x(t)$ - n - вектор состояния системы Σ_1 , а $\eta(t)$ - k - вектор состояния системы Σ_2 .

Для объединения двух систем в одну введём расширенный $n+k$ - вектор состояния $z(t)$, равный объединению векторов состояний обеих систем: $z(t) = (x(t) \ \eta(t))^T$. Тогда нетрудно увидеть, что при использовании следующих блочных матриц (11.5) получаем систему вида (11.3), имеющую точно такое же отображение вход-выход, как и последовательно включённые Σ_1 и Σ_2 .

$$\Sigma_{\text{пол.}}: \begin{cases} \dot{z}(t) = A^* z(t) + B^* u(t); \\ y(t) = C^* z(t) + D^* u(t); \end{cases} \quad A^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ G \bullet C & F \end{pmatrix}; \quad B^* = \begin{pmatrix} B \\ G \bullet D \end{pmatrix}; \quad (11.5)$$

$$C^* = (0 \ H); \quad D^* = T \bullet D;$$

A^*, B^*, C^* - блочные матрицы.

Программа, которая вычисляет блочные матрицы по исходным, делает подобные преобразования элементарным. Аналогичным образом могут быть представлены и другие схемы включения систем вида (11.3).

• Лекция 12.

Устойчивость систем автоматического управления.

- ✓ Техническое понятие устойчивости отражает понятное и очевидное свойство "хорошей" технической системы не только стабильно работать в нормальных режимах, но и "не уходить вразнос" при некотором, возможно небольшом, отклонении всевозможных параметров от номинала.
- ✓ Устойчивость системы - простейшее техническое требование в системы в ряду более сложных требований, связанных с показателями качества и точности САУ.
- ✓ Свойство устойчивости, являясь простейшим свойством системы, без которого система неработоспособна, может быть выражено числовыми показателями, которые легко могут быть вычислены и непосредственно связаны со всеми другими показателями качества и точности системы.

Не будем останавливаться на строгих математических определениях устойчивости, так как самих этих определений устойчивости имеется несколько, их применимость связана с видом нелинейности системы. Для инженерной практики важно понимание двух теоретических фактов, установленных А.М. Ляпуновым в 1891г.:

- Устойчивость нелинейной системы в окрестности номинальной траектории тесно связана с устойчивостью линеаризованной системы.
- Устойчивость линейной системы с постоянными коэффициентами исследуется легко и эффективно.

Ограничимся инженерным понятием устойчивости, обычно достаточным при проектировании линейных и линеаризуемых систем.

Определение устойчивости системы (нестрогое):

С инженерной точки зрения, устойчивость понимается так:

- ❖ Малое изменение исходных данных должно приводить к малому же изменению результатов.

Для линейных систем с постоянными коэффициентами все определения устойчивости эквивалентны и связаны с корнями характеристического уравнения, которое в разных представлениях САУ может выражаться несколько по-разному.

Рассмотрим простейший случай, когда САУ задана передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{Q(p)}{P(p)}$$

В этом случае характеристическое уравнение связано с полиномом в знаменателе передаточной функции:

$P(p)=0$ - характеристическое уравнение.

Как всякое полиномиальное уравнение порядка n с вещественными коэффициентами, оно имеет ровно n корней (среди них возможны комплексно-сопряжённые).

Известно, что общее решение системы линейных дифференциальных уравнений или линейного дифференциального уравнения высокого порядка (эти понятия сводятся друг к другу) выражается в виде суммы общего решения однородного уравнения (с 0 правой частью) и частного решения неоднородного уравнения (формула (6.7)). Поэтому для того, чтобы переходный процесс заканчивался, надо, чтобы решение однородного уравнения в формуле (6.7) стремилось к 0 (или хотя бы к константе).

$$Y_{\text{неоднородного}}^{\text{общее}}(t) = Y_{\text{однородного}}^{\text{общее}}(t) + Y_{\text{неоднородного}}^{\text{частное}}(t);$$

При тех сигналах, которые имеются в САУ, частное решение обычно имеет простой вид, не влияющий на устойчивость. **Следовательно, вопрос устойчивости сводится к устойчивости однородного уравнения.**

Решение однородного уравнения выражается через корни характеристического уравнения и коэффициенты перед экспонентами, которые могут быть вычислены через вычеты:

$$Y_{\text{однородного}}^{\text{общее}}(t) = \sum_{k=1, n} C_k e^{p_k t}; \quad (12.1)$$

здесь p_k – корни характ. уравнения n -го порядка.

Из этой формулы делаем основной вывод: чтобы переходный процесс заканчивался:

- **достаточно, чтобы вещественные части корней p_k характеристического уравнения n -го порядка были отрицательные, в этом случае имеются затухающие по экспоненте решения;**
- **если имеются чисто мнимые корни, то в переходном процессе будут гармонические незатухающие компоненты.**

Для проверки факта отрицательности вещественных частей корней (эквивалентного, конечно, устойчивости) имеется целый ряд критериев. Разница между этими критериями заключается в том, каким именно образом проверяется расположение корней в левой полуплоскости. Это можно сделать тремя способами:

- ✓ вычислив корни непосредственно, что бывает непросто вычислительной задачей, но для этого имеется много готовых программ;
- ✓ связав расположение корней с коэффициентами характеристического уравнения для последующего аналитического исследования. Это удобно для решения задач синтеза, но трудности вычислений быстро возрастают с ростом порядка системы;
- ✓ судить об устойчивости по частотным характеристикам замкнутой или разомкнутой САУ.

Первые два способа называются **алгебраическими**, последний - **частотным**. В инженерной практике необходимо иметь эффективные **критерии** исследования устойчивости, то есть удобные правила проверки устойчивости.

Замечание: Сам по себе критерий не обязан быть необходимым и достаточным условием. Обычно получения такого критерия является делом более сложным, чем отдельно необходимого или достаточного критерия. Особенно ярко это проявляется в случае нелинейных систем, которые будут рассмотрены во второй части нашего курса лекций.

Алгебраические методы исследования устойчивости.

- **Необходимое условие устойчивости.**

Если корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости (система устойчива), то все коэффициенты уравнения имеют один знак:

$$P(p) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0; \quad \{a_k > 0\} \text{ одновременно.}$$

Равенство коэффициентов нулю не допускается (граница устойчивости).

Доказательство очень простое, заключается в разложении полинома на простейшие множители - скобки. Эти скобки могут быть вещественные или комплексно-сопряжённые. Объединим последние в пары и перемножим:

$$P(p) = a_0 \prod_{i=1,k} (p - p_i) \prod_{j=1,l} (p - p_j)(\overline{p - p_j}) = a_0 \prod_{i=1,k} (p - p_i) \prod_{j=1,l} (p^2 - 2\operatorname{Re}p_j + |p_j|^2); \quad (12.2)$$

При раскрытии скобок, если вещественные части корней отрицательны, а коэффициент $a_0 > 0$, получим полином с положительными коэффициентами. При отрицательном a_0 все коэффициенты полинома будут отрицательны. Сама схема рассуждения показывает, что получено лишь необходимое условие устойчивости. Простейшие примеры это демонстрируют:

Например: $p^2 - p + 1$ – неустойчивый полином;

$3p^3 + p^2 - p + 1$ – также неустойчивый.

Однако, $p^2 + p + 1$ – устойчивый полином (необходимо вычислить корни);

но! $3p^3 + p^2 + p + 1$ – также неустойчивый (проверьте!), хотя необходимое условие устойчивости выполнено.

Приведённый пример показывает, что данное условие, в самом деле, лишь необходимое, но не обязательно достаточное. Область его применения – отсеивание заведомо неустойчивых систем.

- **Необходимое и достаточное условие. Критерий Гурвица.**
(Адольф Гурвиц, Цюрих 1895г.)

При условии $a_0 > 0$ (это условие легко изменить на противоположное) для устойчивости необходимо и достаточно выполнения n неравенств: $\Gamma_k > 0$ при $k = 1, \dots, n$, где n – порядок системы:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}; \quad (12.3)$$

В первой строке каждого определителя находятся нечётные коэффициенты уравнения. Во второй строке – чётные. Далее идёт сдвиг на одно место вправо и т.д. В итоге проверяются **n определителей Γ_k , которые являются главными диагональными минорами матрицы Гурвица G .**

Сложности использования критерия Гурвица быстро возрастают с ростом порядка полинома. Возможно эффективное использование критерия при величине **$n < 5$** , так как при больших размерностях число проверяемых условий стремительно возрастает.

Рассмотрим простейшие случаи.

- **$n = 1$:**

- ✓ **$a_1 > 0$** ; что в совокупности с $\{a_k > 0\}$ не даёт ничего нового.

Итак, в системе **первого порядка необходимое условие устойчивости совпадает с достаточным** и сводится к одновременной положительности коэффициентов.

- **$n = 2$:**

- ✓ **$a_1 > 0$** ;

- ✓ **$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$** ; в совокупности с $\{a_k > 0\}$ не даёт ничего нового, так как $a_3 = 0$ (его просто нет в уравнении 2 порядка).

В системе **второго порядка необходимое условие устойчивости также совпадает с достаточным** и сводится к одновременной положительности коэффициентов.

- **$n = 3$:**

- ✓ **$a_1 > 0$** ;

- ✓ **$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$** ;

- ✓ **$a_3 \Gamma_2 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0$** .

В этих трёх условиях 1 и 3 не дают ничего нового, а второе условие является содержательным, отличая систему 3 порядка от 2 и 1.

В системе третьего порядка необходимое условие устойчивости не совпадает с достаточным и сводится не только к одновременной положительности коэффициентов, но и к дополнительному неравенству:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 \quad (12.4)$$

Возвращаясь к примеру на предыдущей странице, становится понятно, почему полином **$3p^3 + p^2 + p + 1$** является неустойчивым, так как не выполняется **необходимое и достаточное** условие устойчивости **$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$** , вытекающее из критерия Гурвица.

При увеличении порядка системы **n** число подобных неравенств, требующих проверки, и их сложность стремительно растут, например, для системы порядка четыре необходимо проверить уже более сложное неравенство **$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0$** , а для порядка пять - двух ещё более сложных неравенств. Заметим, что существует целый ряд модификаций критерия Гурвица, в том числе, и существенно упрощающих вычисления, например, критерий **Рауса**. Доказательство критерия Гурвица-Рауса мы не приводим, так как оно достаточно сложное.

- **Лекция 13.**

Частотные методы исследования устойчивости.

Частотные методы исследования устойчивости основаны на связи расположения корней характеристического полинома $P(p)$ с годографом этого полинома на комплексной плоскости, т.е. графиком комплексно-значной функции $P(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ .

Основным теоретическим результатом является **критерий А.В Михайлова**. Этот критерий формулируется в терминах свойств годографа характеристического полинома, а следствия критерия Михайлова, например, **критерий Найквиста**, уже формулируются в виде требований к передаточным функциям.

- **Необходимое и достаточное условие. Критерий Михайлова.**
(А.В.Михайлов, Москва 1938г.)

Критерий Михайлова основан на принципе аргумента функции комплексного переменного: при обходе любого замкнутого контура на комплексной плоскости переменного z приращение аргумента функции комплексного переменного $P(z)$: $\Delta \arg P(z) = (m-k) \cdot 2\pi$, где m - число нулей функции $P(z)$, а k - число полюсов функции $P(z)$. Применительно к годографу характеристического полинома получаем следующее условие Михайлова, являющееся критерием устойчивости (данное условие - необходимое и достаточное):

Годограф устойчивого полинома n – го порядка с положительными коэффициентами ($a_k > 0$) должен:

- ✓ **начинаясь на положительной вещественной полуоси,**
- ✓ **последовательно пройти n квадрантов, поворачиваясь против часовой стрелки. Приращение аргумента годографа составляет при этом $\Delta\varphi = n \cdot \pi/2$.**

В самом деле, в данном случае в качестве контура можно взять границу полуокруга бесконечного радиуса, находящегося в правой полуплоскости и имеющего в качестве диаметра мнимую полуось. Далее, полином не имеет полюсов, поэтому принцип аргумента в этом случае означает: $\Delta \arg P(j\omega) = m \cdot 2\pi$, где m - число **неустойчивых корней характеристического уравнения $P(z)=0$** . Так как $P(-j\omega) = P(j\omega)$, то достаточно ограничиться изменением частоты лишь в пределах от 0 до ∞ , то есть именно в том диапазоне, в котором строится АФЧХ. Окончательно, учитывая эту симметрию годографа относительно вещественной оси и тот факт, что в **устойчивой системе не должно быть корней в правой полуплоскости: $\Delta \arg P(j\omega) = n \cdot \pi/2$, при изменении ω от 0 до ∞** . (Более подробно,- необходимо рассмотреть весь контур, как совокупность двух - мнимой оси и полуокружности беско-

нечного радиуса. Для совокупности этих двух контуров справедлив принцип аргумента, а приращение аргумента $P(z)$ на полуокружности равно πn .)

Нарушение любой части Критерия Михайлова приводит к неустойчивости.

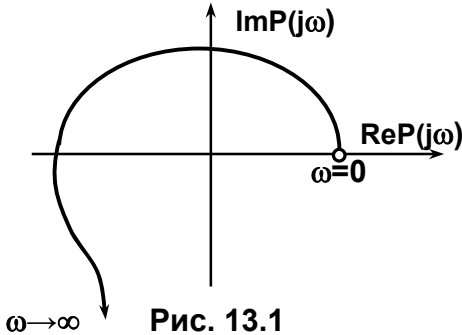


Рис. 13.1

Это пример устойчивого годографа для полинома порядка 3.

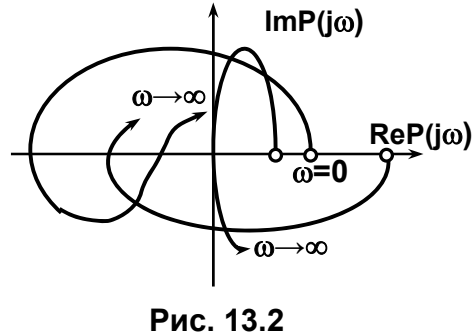


Рис. 13.2

Это пример неустойчивых годографов Михайлова.

Из критерия Михайлова вытекает простое **правило перемежаемости (чередующести) корней**. В самом деле, из рисунка видно, что корни мнимой и вещественных частей при увеличении ω сменяют друг друга в строгой последовательности, запишем это условие в явном виде:

$$P(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = \underbrace{(a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots)}_{X(\omega)} + j \underbrace{(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots)}_{Y(\omega)}$$

Найдем корни отдельно вещественной и отдельно мнимой части и расположим их в порядке возрастания:
 $0 = \omega_1^Y < \omega_1^X < \omega_2^Y < \omega_2^X < \dots$ **правило чередования корней.**
 Заметим, что здесь строгие неравенства.

Применим для полинома третьего порядка:

$$P(j\omega) = a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2j\omega + a_3 = -ja_0\omega^3 - a_1\omega^2 + a_2j\omega + a_3 = \underbrace{(a_3 - a_1\omega^2)}_{X(\omega)} + j \underbrace{(a_2\omega - a_0\omega^3)}_{Y(\omega)}$$

$$\text{Корни: } \begin{cases} X(\omega) = a_3 - a_1\omega^2 = 0; & \omega_{1,2}^X = \pm \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}; & \omega_1^X = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}; \\ Y(\omega) = a_2 - a_0\omega^2 = 0; & \omega_{1,2}^Y = \pm \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}; & \omega_1^Y = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \end{cases}; \text{ т.к. } \omega \geq 0; \quad (13.1)$$

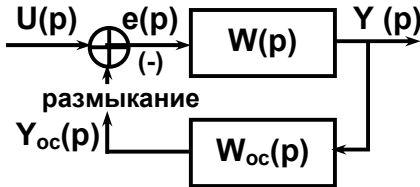
Условие чередования даёт: $\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} < \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$ т.е. $a_1 a_2 > a_0 a_3$, это же вытекает для системы третьего порядка из критерия Гурвица.

Отметим, что преимущество применения правила перемежаемости – более простые полиномы (только чётного и только нечётного порядка). Также неоспоримым преимуществом является наглядность критерия.

• **Критерий устойчивости замкнутой системы - критерий Найквиста.**
(Х. Найквист, 1932г.)

Позволяет исследовать устойчивость замкнутой системы (всей САУ) по частотной характеристике разомкнутой системы.

Определение: разомкнутой системой являются все последовательно соединенные блоки от входа системы до точки замыкания обратной связи.

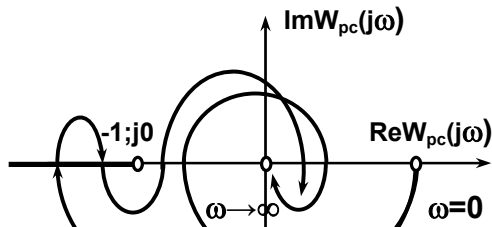


$$W_{pc}(p) = W(p) W_{oc}(p); \quad (13.2)$$

Соответственно имеется АФЧХ разомкнутой системы $W_{pc}(j\omega)$.

Рис. 13.3

Типичный вид АФЧХ разомкнутой САУ имеет вид:



"Клювообразная" АФЧХ.

Рис. 13.4

Критерий Найквиста связывает устойчивость **замкнутой системы** с поведением годографа **АФЧХ разомкнутой системы**. При изменении частоты от **0** до ∞ годограф АФЧХ устойчивой системы не должен "охватывать" точку **-1**. Понятие "охват точки" требует уточнения.

Типичный вид годографов АФЧХ разомкнутой системы.

Критерий Найквиста доказывается с помощью двукратного применения критерия Михайлова: один раз - к разомкнутой системе (устойчивой или неустойчивой), другой раз - к замкнутой системе (только устойчивой).

Имеется две формы критерия Найквиста, соответствующие случаям, когда разомкнутая система устойчива, и когда разомкнутая система неустойчива.

Критерий Найквиста (случай устойчивой разомкнутой системы).

Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф устойчивой разомкнутой системы "не охватывал" точку $(-1;j0)$.

На рисунке приведена АФЧХ устойчивой разомкнутой системы, для которой замкнутая система будет устойчивой. Обращает на себя внимание так называемая "клювообразная" АФЧХ. При такой АФЧХ замкнутая система является устойчивой, несмотря на кажущийся "охват" точки $(-1;j0)$. Поэтому уточнением нечетко сформулированное понятие "охват точки" $(-1;j0)$ годографом Найквиста: абсолютно точное **правило переходов:**

положительным считается переход годографа **левее $(-1;j0)$** снизу вверх, отрицательным считается переход годографа **левее $(-1;j0)$** сверху вниз.

(\downarrow - отрицательный, \uparrow - положительный).

- **Нехват** означает, что сумма переходов равна нулю.
- **Охват** означает, что положительных переходов больше, чем отрицательных.
- Если годограф начинается на отрицательной полуоси, то начальный переход считается за 1/2 перехода.

Теперь ясно, почему система с "клювообразной" АФЧХ, приведенной на рисунке выше, соответствует устойчивой замкнутой системе - сумма переходов левее критической точки равна 0.

Имеется ещё один тип АФЧХ, имеющих разрыв при переходе через некоторое критическое значение. В частности, таким значением может быть 0. Это бывает при наличии в разомкнутой системе интегратора, за счёт чего знаменатель АФЧХ обращается в ноль на нулевой частоте.

Годограф АФЧХ имеет разрыв при

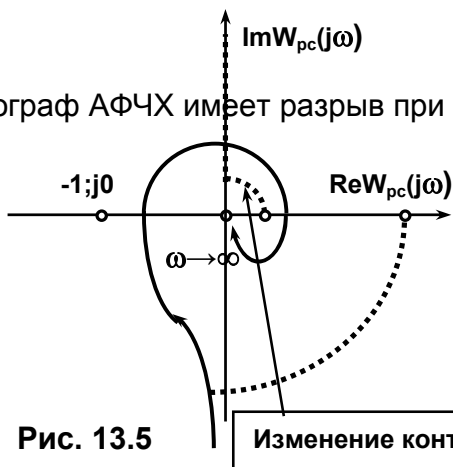


Рис. 13.5

Изменение контура ω .

Типичный вид годографа АФЧХ разомкнутой системы с интегратором.

$$W_{pc}(p) = \frac{Q(p)}{P^*(p) \cdot p}; \quad (13.3)$$

$\omega=0$ из-за наличия интегратора. **Критерий Найквиста** применим, для этого достаточно заметить, что при бесконечно малом изменении контура обхода частоты в окрестности 0 годограф также меняется, но становится видна закономерность его прохождения.

Критерий Найквиста (полная формулировка)

Пусть разомкнутая система имеет m неустойчивых корней, тогда для устойчивой замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста разомкнутой системы охватил точку $(-1; j0)$ $m/2$ раз.

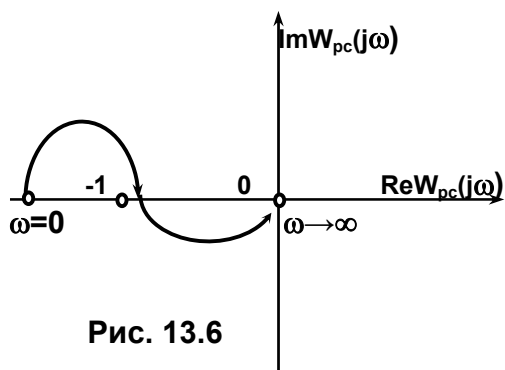


Рис. 13.6

Замкнутая система с таким АФЧХ разомкнутой системы будет устойчивой, если в разомкнутой системе есть **один неустойчивый** корень. В этом случае годограф **охватывает точку $(-1; j0)$ $m/2=0.5$ раз**. Переход при $\omega=0$ считается за половину отрицательного перехода.

• Лекция 14.

Понятие запаса устойчивости по амплитуде и фазе.

При выполнении условий критерия Найквиста годограф может при этом не охватывать точку $(-1; j0)$ "с запасом". Оценим этот запас. Рассматривается отдельно запас по амплитуде и по фазе.

ΔA - запас по амплитуде; $\Delta \varphi$ - запас по фазе.

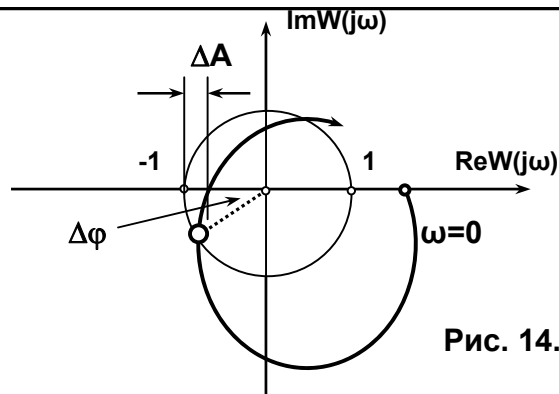


Рис. 14.1

Запас по амплитуде означает, что при увеличении коэффициента усиления на ΔA система станет неустойчивой.

Аналогично, при появлении дополнительного фазового сдвига $\Delta \varphi$ система также станет неустойчивой. Разные причины могут влиять на запасы устойчивости. В процессе проектирования гарантируются запасы устойчивости не ниже заданных. Таким образом, **запасы устойчивости есть данные на проектирование САУ**.

Критерий устойчивости Найквиста может быть сформулирован с помощью логарифмических частотных характеристик, при этом и запасы устойчивости можно также и на языке ЛАЧХ и ФЧХ. При этом определяются $\Delta L_{дб} = 20 \lg(\Delta A)$ и $\Delta \varphi$.

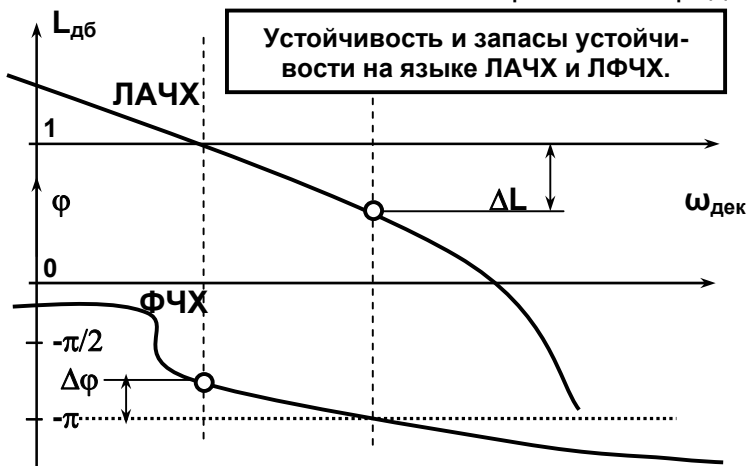
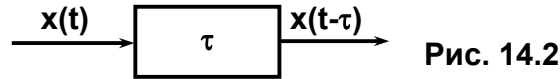


Рис. 14.2

Влияние звена чистого запаздывания на устойчивость.

Чистое запаздывание – это часть системы (цепь или блок), при прохождении которой сигнал не меняет своей формы, но задерживается на время τ .

Типичный пример: локальная сеть без потерь или длинная линия, или транспортная задержка.



Покажем, что такому преобразованию соответствует передаточная функция; для этого вычислим преобразование Лапласа выходного сигнала:

$$L(x(t-\tau)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t-\tau) dt = \int_{-\tau}^{\infty} x(\sigma) e^{-p(\sigma+\tau)} d\sigma =$$

$$= \int_{-\tau}^{\infty} e^{-p\tau} e^{-p\sigma} x(\sigma) d\sigma = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-p\sigma} x(\sigma) d\sigma = e^{-p\tau} X(p);$$

$$W_{\text{зап}}(p) = e^{-p\tau}; \quad (14.1)$$

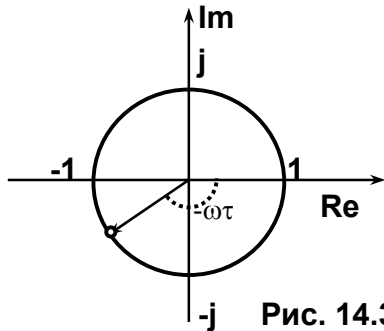
Таким образом, звену чистого запаздывания соответствует передаточная функция, не являющаяся дробно-рациональной. Она трансцендентная.

Рассмотрим АФЧХ - частотную характеристику звена чистого запаздывания:

$W_{\text{зап}}(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)$; При любом ω получается точка ед. окружности

$$\text{АЧХ: } |W_{\text{зап}}(j\omega)| = 1; \quad (14.2)$$

$$\text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = -\omega\tau; \quad (14.3)$$



Видим, что звено чистого запаздывания добавляет отрицательный фазовый сдвиг, тем больший, чем больше частота, тем самым уменьшая запас устойчивости по фазе. За счет этого сдвига система вполне может стать неустойчивой.

К сожалению, подобным образом нельзя описать запаздывание, зависящее от времени.

Фактически, мы ввели еще один стандартный блок, который можно было бы включить в стандартные звенья, если бы оно имело обычную, а не трансцендентную передаточную функцию. Полученное звено запаздывания формально является звеном бесконечного порядка, поэтому алгебраические методы исследования устойчивости системы, содержащей звенья запаздывания неприменимы.

Пример 7: Охватим инерционное звено ООС с запаздыванием на время τ .

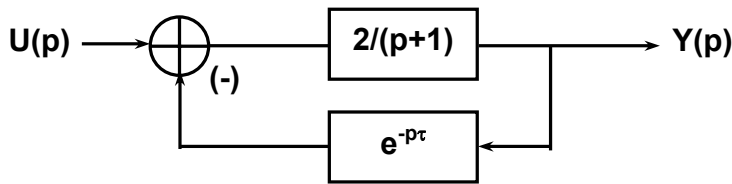


Рис. 14.4

Вычислим для замкнутой системы передаточную функцию и характеристический полином:

$$W_{\text{зс}}(p) = \frac{\frac{2}{p+1}}{1 + \frac{2}{p+1}e^{-p\tau}} = \frac{2}{p+1+2e^{-p\tau}}; \quad P_{\text{зс}}(p) = p+1+2e^{-p\tau} = 0; \quad (14.5)$$

У такого характеристического полинома бесконечное число корней, среди которых могут быть и корни неустойчивые, поэтому численные методы становятся бессмысленными для обоснования устойчивости. Неприменимы критерий Гурвица и необходимое условие устойчивости, а вот **частотные критерии устойчивости полностью применимы**. Критерий Михайлова и, вытекающий из него критерий Найквиста, позволяют вполне корректно судить об устойчивости таких систем. Найдём АФЧХ разомкнутой системы.

$$W_{\text{pc}}(j\omega) = \left[\frac{2}{j\omega + 1} e^{-j\omega\tau} \right];$$

Как выяснить, при каком значении τ система (замкнутая) становится неустойчивой. Рассмотрим пограничный случай - прохождение через $(-1; j0)$ на некоторой частоте ω^* ; Будем искать то **минимальное** значение времени запаздывания, при котором появляется неустойчивость. Подставим АЧХ и ФЧХ инерционного звена и звена чистого запаздывания и решаем комплексное уравнение относительно ω^* и τ . Для этого приравняем по отдельности модуль и аргумент. Для модуля имеется следующее равенство:

$$\frac{2}{j\omega^* + 1} \cdot e^{-j\omega^*\tau} = -1 + 0j$$

$$\frac{1 \cdot 2}{\sqrt{1 + \omega^{*2}}} \cdot e^{-j\arctg\omega^*} \cdot e^{-j\omega^*\tau} = -1$$

$$2 = \sqrt{1 + \omega^{*2}} \Rightarrow \omega^* = \sqrt{3}$$

Для равенства аргументов требуется, чтобы **$\sin(\arctg\omega^* - \omega^*\tau) = 0$** ;

Отсюда

вытекает, что **$\arctg\omega^* - \omega^*\tau = \pi$** .

Поэтому для τ получаем: $-\arctg\sqrt{3} - \sqrt{3}\tau = -\pi$; $-\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\tau = -\pi$;

$$\tau = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1.209; \quad (14.6)$$

Это значение τ есть то минимальное запаздывание в нашей системе, при котором замкнутая система уже становится неустойчивой. Заметим, что звено запаздывания может располагаться и в прямой ветви, в данном случае все расчёты сохраняются.

• Лекция 15

Точность САУ.

Понятие точности является центральным в теории автоматического управления, так как позволяет количественно выразить показатели качества САУ. Показатели точности и качества фигурируют в заданиях на проектирование САУ.

Проще всего рассмотреть понятие точности на примере следящей системы.

Все понятие о точности заключается в поведении во времени сигнала ошибки.

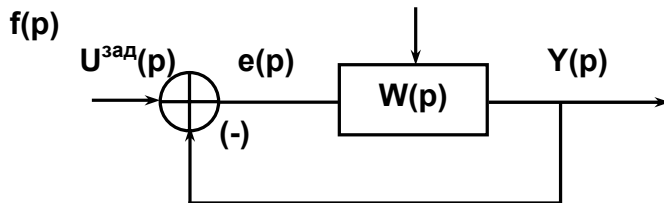


Рис. 15.1

$$e(t) = U^{\text{зад}}(t) - Y(t) \text{ - динамическая точность.}$$

Точность рассматриваемая в переходном процессе - **динамическая точность** и точность в установившемся режиме - **статическая точность**.

Рассмотрим **статическую точность** $e_{\text{уст}} = e(\infty)$. Наиболее эффективным методом изучения статической точности является использование предельной теоремы операционного исчисления.

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p e(p);$$

Необходимо уметь вычислять сигнал ошибки $e(t)$. Для этого наилучшим образом применима передаточная функция по ошибке, позволяющая записать сигнал ошибки при любом виде задающего воздействия:

$$e(p) = W_e(p) U^{\text{зад}}(p) + W_{\text{эф}}(p) f(p). \quad (15.1)$$

Далее будет показано, что практически невозможно обеспечить высокий показатель точности при *абсолютно произвольном* входном воздействии. Рассмотрим некоторые наиболее практически применимые частные случаи исследования точности САУ.

• Точность по задающему воздействию.

Статическая точность при гармоническом входном воздействии.

Самым простым методом изучения точности является использование передаточной функции по ошибке.

$$e(p) = W_e(p) \cdot U^{\text{зад}}(p); \quad W_{\text{зс}}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)};$$

$$W_e(p) = \frac{1}{1 + W(p)} \text{ - для следящей системы.} \quad (15.2)$$

Рассмотрим частотную характеристику системы (т.е. установившуюся реакцию при гармоническом входном воздействии).

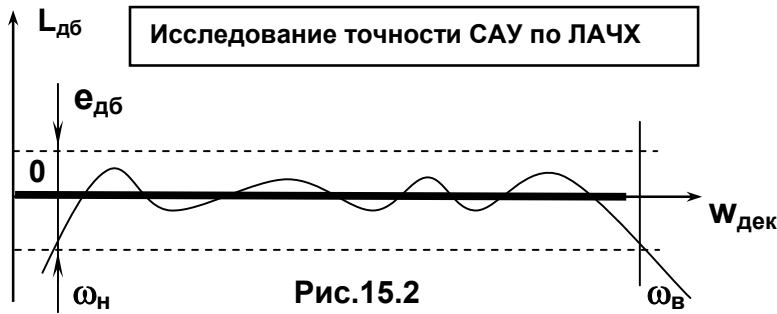


Рис.15.2

Жирной линией показан идеальный случай абсолютно точной системы. Реальная частотная характеристика отличается от идеальной и в некоторой полосе частот (ω_n , ω_b) не выходит за пределы допуска $e_{дб}$. Такое же рассуждение справедливо и для ФЧХ. Задав допустимые границы точности по амплитуде и по фазе, получим область частот, где гарантируется данная точность - это полоса пропускания. Задавая требуемую рабочую частоту можно вычислить ошибку на этой частоте при гармоническом воздействии.

Далее рассмотрим общие методы повышения точности как в статическом, так и в динамическом режимах.

➤ **Общий способ повышения точности – обеспечение следующих оценок:**

$$\begin{cases} W_{зс}(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} \approx 1; & \text{-это мера точности воспроизведе-} \\ & \text{ния задающего воздействия. (15.3)} \\ W_e(p) = \frac{1}{1+W(p)} \approx 0; & \text{-мера малости ошибки слежения.} \end{cases}$$

Можно разными способами можно изменить передаточную функцию $W_{pc}(p)$ разомкнутой системы, чтобы добиться повышения точности.

Увеличение K разомкнутой системы есть один из основных способов повышения точности.

$$W_{pc}(p) = K \frac{b_0 p^m + \dots + 1}{a_0 p^n + \dots + 1} = K W_{pc}^*(p); \quad \text{-передаточная функция разомкнутой системы.}$$

Коэффициент усиления разомкнутой системы получается при наличии единиц в свободных членах числителя и знаменателя ПФ или так: $K = W_{pc}(0)$;

Пример 8:

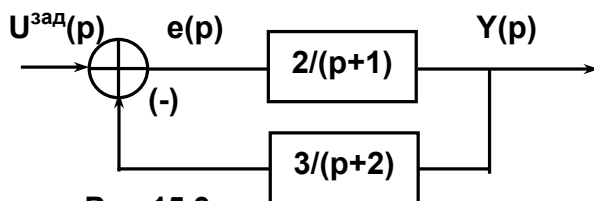


Рис.15.3

$$\begin{aligned} W_{pc}(p) &= \frac{2 \cdot 3}{(p+1)(p+2)} = \\ &= \frac{6}{p^2 + 3p + 2} = 3 \cdot \frac{1}{0.5p^2 + 1.5p + 1}; \end{aligned}$$

В этом случае $K=3 = W_{pc}(0)$.

При увеличении K оба приближённых равенства (15.3) выполняются всё более точно, что говорит об общем повышении точности, причём это повышение точности происходит при любой $W_{pc}^*(p)$.

$$\begin{cases} W_{zc}(p) = \frac{KW_{pc}^*(p)}{1 + KW_{pc}^*(p)} \stackrel{K \gg 1}{\approx} 1; \\ W_e(p) = \frac{1}{1 + KW_{pc}^*(p)} \stackrel{K \gg 1}{\approx} 0; \end{cases}$$

Создаётся обманчивое впечатление, что можно таким образом достичь любой желаемой точности. Однако, здесь начинает сказываться одно из фундаментальных противоречий в рамках ТУ - **противоречие между точностью системы и запасом устойчивости**. Убедимся, что при чрезмерном увеличении K возможна потеря устойчивости замкнутой системы. В самом деле, покажем, что годограф Найквиста, не охватывающий точку $(-1; j0)$, но проходящий из 3-го квадранта во второй, при увеличении K начинает охватывать эту точку, то есть нарушается условие критерия устойчивости Найквиста. Но это почти очевидно, так как что при увеличении K годограф Найквиста "раздувается" относительно начала координат:

$$KW_{pc}^*(j\omega) = K(\operatorname{Re}W_{pc}^*(j\omega) + j\operatorname{Im}W_{pc}^*(j\omega)) = K\operatorname{Re}W_{pc}^*(j\omega) + jK\operatorname{Im}W_{pc}^*(j\omega).$$

Очевидно, что повышение точности приводит к уменьшению запаса устойчивости по амплитуде.

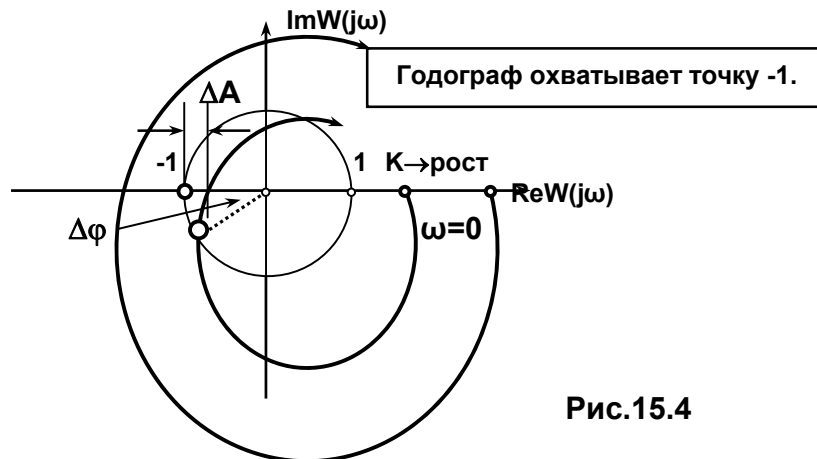


Рис.15.4

Потеря запаса устойчивости при увеличении коэффициента усиления.

- **Итак, с помощью увеличения коэффициента усиления можно повысить точность лишь в пределах запаса устойчивости по амплитуде.**

Теперь перейдём к вычислению конкретных значений точности, которые, безусловно, будут ещё зависеть от вида задающего воздействия. Рассмотрим поэтому произвольное входное воздействие и выразим сигнал ошибки (в данном случае для следящей системы - ошибки слежения) через передаточную функцию по ошибке и задающее воздействие. В конечном счёте, ведь именно сигнал ошибки и измеряет точность в любой момент времени.

Разложим $W_e(p)$ в ряд Тейлора в окрестности 0, предполагая, что ряд Тейлора сходится.

$$W_e(p) = W_e(0) + \left. \frac{dW_e(p)}{dp} \right|_{p=0} p + \left. \frac{d^2 W_e(p)}{dp^2} \right|_{p=0} \frac{1}{2!} p^2 + \dots; \quad (15.4)$$

Предположение о сходимости ряда выполняется, как и для любого степенного ряда, в некоторой окрестности 0, то есть при условии $|p|$ - мал.

$$e(p) = \left(\underbrace{W_e(0)}_{C_0} + \underbrace{\dot{W}_e(0)}_{C_1} p + \underbrace{\ddot{W}_e(0)}_{C_2} \cdot \frac{1}{2} p^2 + \dots \right) \cdot U^{\text{зад}}(p); \quad (15.5)$$

Коэффициенты $\{C_k\}$ называются коэффициентами ошибок. C_k являются значениями в 0 производных передаточной функции по ошибке и позволяют следующим образом выразить текущее значение ошибки через производные задающего воздействия:

$$e(p) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i p^i \cdot U^{\text{зад}}(p) \cong \sum_{i=0}^N C_i p^i \cdot U^{\text{зад}}(p); \quad C_k = \left. \frac{d^k W_e(p)}{dp^k} \right|_{p=0};$$

$$e(t) = C_0 U^{\text{зад}}(t) + C_1 \dot{U}^{\text{зад}}(t) + C_2 \ddot{U}^{\text{зад}}(t) + \dots \cong \sum_{i=0, N} C_i U^{(i)\text{зад}}(t); \quad (15.6)$$

Условие малости $|p|$ после перехода во временную область означает что ряд (53) будет сходящимся для достаточно большого t .

- Значение сигнала ошибки связано со всеми производными входного сигнала. Кроме того, нельзя упускать из виду, что формулы (15.4-6) справедливы лишь при условии сходимости ряда, то есть для достаточно большого времени иными словами, в установившемся режиме. Поэтому формулы (15.4-6) применимы к **статической точности**, хотя и производят обманчивое впечатление. В формулах также отражено, что на практике, конечно, обычно пользуются лишь конечным отрезком ряда - до члена порядка N .
- **Для типовых входных сигналов лишь конечное число производных не равно нулю, поэтому вместо ряда получается конечное выражение.** Это не означает, однако, что в случае типовых воздействий вопрос о сходимости отпадает, так как должен ещё сходиться ряд для передаточной функции по ошибке, а это не зависит от вида задающего воздействия.

Вычислим теперь величину установившейся ошибки в случае разных воздействий.

- Единичное задающее воздействие: $U^{\text{зад}}(t) = 1(t)$;

$$e(t) = C_0; \quad (15.7)$$

Выясним, от чего зависит C_0 и C_1 .

$$C_0 = W_e(0) = \frac{1}{1 + W(0)} = \frac{1}{1 + K}; \quad C_1 = \dot{W}_e(0) = \frac{-\dot{W}(0)}{(1 + W(0))^2} = \frac{1}{(1 + K)^2}; \quad (15.8)$$

Таким образом, увеличение коэффициента усиления разомкнутой системы

уменьшает коэффициенты ошибок C_0 и C_1 то есть, в частности, ошибку при ступенчатом $U^{зад}(t)$.

Есть другой способ уменьшения C_0 и некоторого количества C_k , если в разомкнутой системе имеется несколько интеграторов, при этом интеграторы могут находиться в любом месте разомкнутой системы.

$$W_{pc}(p) = K \cdot W(p) \cdot \frac{1}{p^k}; \quad W_e(p) = \frac{1}{1 + W_{pc}(p)} = \frac{1}{1 + KW(p)p^{-k}} = \frac{p^k}{p^k + KW(p)}$$

Нетрудно видеть, что:

$$\left. \frac{d^n}{dp^n} [W_e(p)] \right|_{p=0} \equiv 0; \quad \text{при } 0 \leq n \leq k; \quad (15.9)$$

т.е. $C_0=0; C_1=0; \dots; C_{k-1}=0;$

- При отсутствии интеграторов в системе $C_0=e_{уст}=1/(1+K)$ при $U^{зад}(t)=1(t)$, но при поступлении на вход линейно-возрастающего (или более сложного) входного воздействия $U^{зад}(t) = t(t)$ ошибка $e_{уст} = C_0 t(t) + \dots$, то есть неограниченно нарастает.
- При наличии одного интегратора в системе, $k=1; C_0=0, e_{уст}=0$ при $U^{зад}(t)=1(t)$, но при поступлении на вход линейно-возрастающего входного воздействия $U^{зад}(t) = t(t)$ ошибка $e_{уст} = C_1$, то есть имеет конечное значение. При более сложных воздействиях (например, квадратичном,) ошибка не ограничена.
- При наличии двух интеграторов в системе, $k=2; C_0=C_1=0, e_{уст}=0$ при $U^{зад}(t)=1(t)$ и при $U^{зад}(t)=t(t)$, но при поступлении на вход квадратично-возрастающего входного воздействия $U^{зад}(t) = t^2(t)$ ошибка $e_{уст} = C_2$, то есть имеет конечное значение. При более сложных воздействиях (например, кубическом,) ошибка не ограничена и так далее.

Определение 4: Если $C_0=C_1=C_{k-1}=0$ то говорят, что система обладает астатизмом k - го порядка. Если $C_0=0$, то говорят просто, что система обладает астатизмом.

Добавление в состав регулятора нескольких интегральных звеньев позволяет повысить порядок астатизма, тем самым обеспечить нулевую установившуюся ошибку для достаточно сложного вида входного воздействия. Заметим, что интеграторы могут быть неотъемлемым свойством элементов системы. Например, передаточная функция двигателя при выходной величине- φ - угол поворота вала содержит интегратор (так как $\varphi(t)=\int \omega(t)dt$).

Но приведённое рассуждение одновременно показывает, что не может существовать системы, имеющей нулевую установившуюся ошибку абсолютно для любого воздействия, так как это потребовало бы равенства $C_k \equiv 0$ при всех k . Но это может быть лишь, если $W_e(p) \equiv 0$, что невозможно для реальной системы.

Вернёмся к вопросу о сходимости функция ряда (15.4). Как всякая обычная передаточная, $W_e(p)$ является дробно-рациональной. Ряд Тейлора для такой функции заведомо сходится в круге, внутри которого нет корней знаменателя. Поэтому радиус сходимости (15.4) определяется **ближайшим к нулю корнем характеристического**

уравнения замкнутой системы. Можно оценить радиус сходимости: $R=1/|p|_{\min}$. (15.10)

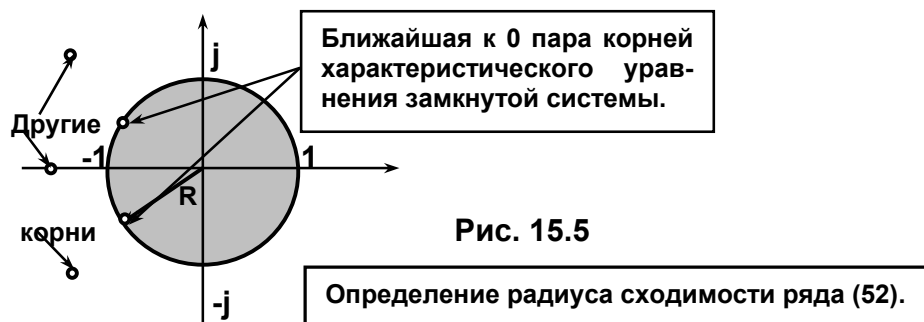


Рис. 15.5

В силу очевидного равенства $t=1/f=2\pi/\omega$, связывающего временную ось и ось частоты, получим оценку того времени, по прошествии которого достигаются установившиеся значения ошибок: $t_{\min} \geq 2\pi/|p|_{\min}$. (15.11)

Убедимся теперь что и добавление интегратора может сделать систему неустойчивой, подобно чрезмерному увеличению K . Противоречие между точностью и устойчивостью проявляется и в этом случае.

Пример 9:

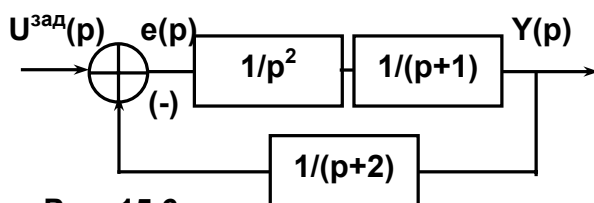


Рис. 15.6

В этой замкнутой системе имеется два интегратора и инерционное звено в ОС. Имеется астатизм второго порядка. Можно, на первый взгляд, ожидать, что

данная система будет иметь высокую точность даже при линейно-нарастающем задающем воздействии. Но вначале проверим устойчивость.

Для исследования устойчивости вычислим характеристический полином замкнутой системы: $P_{зс}(p)=p^2(p+1)(p+2)+1=p^4+2p^2+2p+1$. Здесь не выполняется необходимое условие устойчивости, так как $a_1=0$ (коэффициент при p^3). Поэтому система заведомо неустойчива.

- Из этого примерка видно, что возможности повышения астатизма простым добавлением интеграторов ограничены.

Чтобы повысить порядок астатизма и не потерять устойчивость вместо интегратора можно подключать так называемые **изодромные звенья**.

• **Лекция 16.**

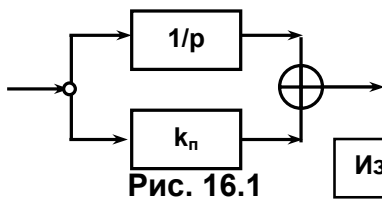


Рис. 16.1

Изодромное звено.

Вместо интегратора используем интегратор с параллельно включённым усилителем. Можно выбирать k_n достаточно малым. Схема называется **изодромным звеном**.

Выбором k_n часто можно обеспечить порядок астатизма и сохранить устойчивость. Но не всегда. Например, в задаче из Примера 9, даже если заменить оба интегратора на изодромные звенья, получится следующий характеристический полином: $P_{зс}(p) = p^4 + (2+k_n^2)p^2 + (2+2k_n)p + 1$. Он по-прежнему неустойчивый, выбором k_n добиться устойчивости невозможно.

✓ **В таких случаях помогает введение дифференцирующих звеньев.**

В рассматриваемой задаче, например, добавим дифференцирование в цепи обратной связи: $W_{ос}(p) = 1/(p+2) + k_d p$.

Тогда : $P_{зс}(p) = p^4 + k_n^2 k_d p^3 + (2+k_n^2 + 2k_n k_d)p^2 + (2+2k_n+k_d)p + 1$. Это уравнение четвёртого порядка уже может иметь устойчивые корни, так как выполняется необходимое условие устойчивости. Достаточное условие, вытекающее из критерия Гурвица, будет иметь вид: $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0$. Покажем, что имеются значения k_n и k_d , при которых это условие выполняется. Например, при $k_n=1; k_d=1.25$ $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 = 0.875$.

• **Точность по возмущающему воздействию.**

Точность по возмущённому воздействию, коэффициенты ошибок по возмущению определяются совершенно аналогично.

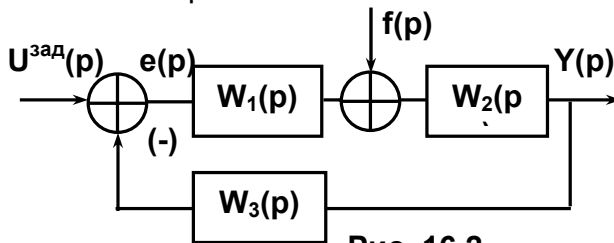


Рис. 16.2

$$W_e(p) = \frac{1}{1 + W_1 W_2 W_3}; \quad (16.1)$$

$$W_{ef}(p) = -\frac{W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 W_3};$$

Определяются $\{D_k\}$ - коэффициенты ошибок по возмущению:

$$D_k = \left. \frac{d^k W_{ef}(p)}{dp^k} \right|_{p=0}; \quad (16.2)$$

Все рассуждения аналогичны, все выводы распространяются на этот случай.

Имеется понятие астатизма по возмущению и добавление интеграторов также может повысить астатизм системы по возмущению.

✓ **Однако, система обладающая астатизмом по управляющему воздействию, может не быть астатической по возмущающему.**

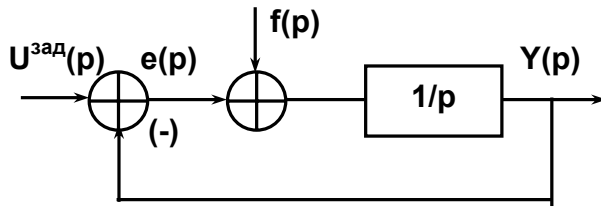


Рис. 16.3

$C_0 = W_e(0) = 0$ - астатизм по заданному воздействию.
 $D_0 = W_{ef}(0) = -1$ - нет астатизма по возмущению.

$$W_e(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{p}{p+1};$$

$$W_{ef}(p) = -\frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{-1}{p+1};$$

- ✓ Для обеспечения астатизма по возмущению интегратор должен быть включен до места приложения возмущающего воздействия.

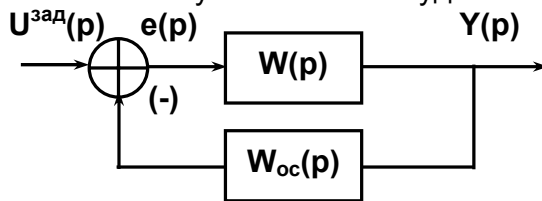
• Динамическая точность.

Обеспечение динамической точности - задача гораздо более сложная, так как требует изучения всего переходного процесса.

Принцип большого коэффициента усиления.

При достаточно большом значении модуля АФЧХ в разомкнутой системе передаточная функция прямой ветви имеет пренебрежимо малое значение.

То есть ПФ замкнутой системы будет в основном определяться цепью ОС.



Если в какой-то области частот коэффициент передачи велик в том смысле, что $W(p)W_{oc}(p) \gg 1$, то $W(p)$ сокращается.

Рис. 16.4
$$W_{zc}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)W_{oc}(p)} \stackrel{|W(p)| \gg 1}{\approx} \frac{1}{W_{oc}(p)}; \quad (16.3)$$

Теперь рассмотрим наиболее глубокий результат в этой области, известный как принцип инвариантности (Г.В. Щипанов. Москва 1939г.).

Принцип инвариантности. Принцип комбинированного управления по задающему воздействию. (По возмущающему воздействию рассуждения абсолютно такие же.)

Идея метода: добавить в стандартную структуру системы дополнительную передаточную функцию $\Psi(p)$ так, чтобы сигнал ошибки вообще не зависел от задающего воздействия. Это отражает хорошо понятный инженеру приём, называемый принципом двухканальности: дополнительно вводится в систему ветвь прохождения нежелательного сигнала, и коэффициент передачи в этой ветви подбирается так, чтобы компенсировать нежелательный сигнал (реализация принципа компенсации).

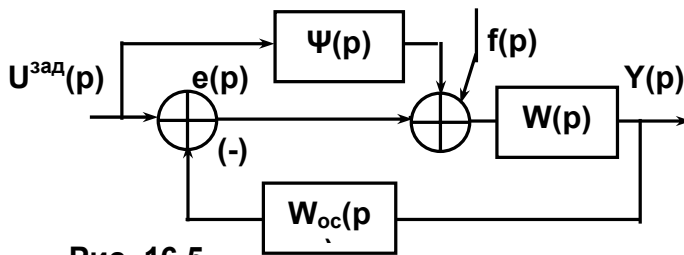


Рис. 16.5

К обычному пути прохождения сигнала ошибки, описываемому передаточной функцией $W_e(p)$, добавляется дополнительное слагаемое.

$$e(p) = W_e(p)U^{\text{зад}}(p) - \Psi(p) \frac{W(p)W_{\text{ос}}(p)}{1 + W(p)W_{\text{ос}}(p)} U^{\text{зад}}(p); \quad (16.4)$$

Выберем $\Psi(p)$ так, чтобы $e(p) \equiv 0$. Это и есть условие инвариантности.

$$\Psi(p) = \frac{1}{1 + W(p)W_{\text{ос}}(p)} \cdot \frac{1 + W(p)W_{\text{ос}}(p)}{W(p)W_{\text{ос}}(p)} = \frac{1}{W(p)W_{\text{ос}}(p)}; \quad (16.5)$$

Формально это обеспечивает инвариантность: $e(p) \equiv 0$ при любом $U^{\text{зад}}(p)$.

Выясним, как выполнение требования инвариантности влияет на устойчивость и насколько реально выполнить требование инвариантности. Вычислив характеристический полином инвариантной системы, видим, что:

- $P_{\text{зс}}(p)_{\text{инвариантной}} = P_{\text{зс}}(p)$, то есть инвариантность, на первый взгляд, не противоречит устойчивости.

Однако, к сожалению, здесь проявляется ещё одно фундаментальное противоречие в рамках ТУ: **противоречие между качеством и реализуемостью корректирующего устройства** (в данном случае, передаточной функции $\Psi(p)$).

- **Либо физически нереализуема ПФ $W(p)W_{\text{ос}}(p)$, либо нереализуема $\Psi(p)$.**

Поэтому, в точности инвариантность реализовать невозможно, однако, взяв несколько первых членов раз-

$$\Psi(p) = \frac{1}{W(p)W_{\text{ос}}(p)} \approx a_0 + a_1 p^1 + \dots + a_k p^k; \quad (16.6)$$

ложения в ряд Тейлора $\Psi(p)$, можно добиться сколь угодно большой точности заменой этих дифференцирующих звеньев на реальные дифференцирующие звенья. Заметим, наконец, что для типовых воздействий лишь конечное число производных отлично от нуля. Поэтому в формуле (16.6) лишь конечное число членов действительно будут иметь значение. В этом случае инвариантность реализовать гораздо проще.

Таким образом, введением производных от некоторого воздействия, можно с наперед заданной точностью решить задачу инвариантности по данному воздействию.

• Лекция 17.

Синтез САУ.

Рассмотренные ранее способы повышения точности и устойчивости системы должны быть более строго сформулированы с целью:

- во-первых, уточнить показатели качества замкнутой системы, которые могут являться заданием на проектирование системы;
- во-вторых, систематизировать методы достижения данного качества.

В системе может быть явно выделена **неизменяемая часть** и оставшаяся **изменяемая часть** системы, в которую можно вносить коррективы.

Неизменяемая часть системы ограничивает возможность получения данного качества в том смысле, что для получения нужного качества в изменяемую часть системы иногда требуется вносить нереализуемые элементы. Обычно качество системы можно существенно повысить, однако эта задача **синтеза** существенно сложнее, чем задача моделирования и, вообще - **анализа** системы. ТУ даёт набор стандартных методов синтеза систем с заданным качеством. Классическим методом этого ряда является **метод диаграмм В.В.Солодовникова**. Этот метод будет рассмотрен ниже.



Рис. 17.1

Принято использовать следующие типовые (стандартные) показатели качества переходного процесса, отражённые на типичном графике переходного процесса в следующей системе со ступенчатым задающим воздействием.

- $t_{пп}$ - **время переходного процесса**: $t_{пп}$ - время окончательного попадания в 5% окрестность установившегося значения.
- $e_{уст}$ - **установившаяся ошибка (статическая точность)**: $e_{уст} = e(\infty) = 1 - y_{уст}$.
Если $e_{уст} = 0$, то система астатическая.
- $\sigma\%$ - **относительное перерегулирование**: $\sigma\% = \frac{y_{max} - y_{зад}}{y_{зад}} \cdot 100\%$;
Обычно требуют, чтобы $\sigma\% < 18\%$.
- n - **число колебаний за время переходного процесса** (≤ 3 шт.).

Это - стандартные (типовые) показатели качества, они понятны для заказчиков. Оказывается, что все четыре показателя теснейшим образом связаны с запасами устойчивости по амплитуде и по фазе. Поэтому, обеспечение стандартных показателей качества обеспечивает необходимую устойчивость.

- ✓ $t_{пп}$, $e_{уст}$, n могут быть легко определены, даже аналитически;
- ✓ $\sigma\%$, к сожалению, вычисляется гораздо сложнее ("проблема перерегулирования").

Задача обеспечения показателей можно рассмотреть как оптимизационную. Эта задача оптимизации, однако, оказывается многокритериальной и по этой причине исключительно трудной для решения, в том числе, численного.

- ✓ Следующий интегральный показатель качества (критерий) одним числовым значением учитывает все типовые показатели качества:

$$J = \int_0^{\infty} \left[e^2(t) + \gamma \dot{e}^2(t) \right] dt; \quad (17.1)$$

С использованием показателя качества (17.1) можно вполне корректно подобрать коэффициенты регулятора, при котором J минимально. При этом получается однокритериальная (но многомерная) задача оптимизации.

Методы построения корректирующих устройств в САУ.

• Последовательное корректирующее устройство.

Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы равна исходной, умноженной на передаточную функцию корректора.

$$[W_{рс}(p)]^{\text{скорректированной}} = W_{рс}(p)^{\text{имеющейся}} \cdot W_{рс}(p)^{\text{корректора}}, \quad (17.2)$$

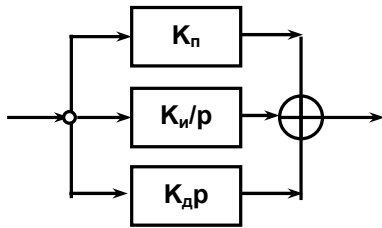
Корректирующее устройство включено последовательно в контуре системы **в любом месте**. Для исследования идеально подходят ЛАЧХ (так как они складываются при последовательном соединении). **Задаются желаемые ЛАЧХ и ЛФЧХ** и тогда:

$$\begin{aligned} L_{\text{желаемая}}(\omega) &= L_{\text{имеющаяся}}(\omega) + L_{\text{корректора}}(\omega); \\ \varphi_{\text{желаемая}}(\omega) &= \varphi_{\text{имеющаяся}}(\omega) + \varphi_{\text{корректора}}(\omega); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\text{корректора}}(\omega) &= L_{\text{желаемая}}(\omega) - L_{\text{имеющаяся}}(\omega); \\ \varphi_{\text{корректора}}(\omega) &= \varphi_{\text{желаемая}}(\omega) - \varphi_{\text{имеющаяся}}(\omega); \end{aligned} \quad (17.3)$$

На следующем шаге можно реализовать эти ЛАЧХ и ЛФЧХ в виде набора типовых звеньев.

Типичным последовательным корректирующим устройством **является ПИД-регулятор**. Эти пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы выпускаются в широком ассортименте и в разнообразных реализациях, включая программную на контроллерах.



ПИД-регулятор имеет три параллельных канала:

- ✓ усилитель с коэффициентом K_p ,
- ✓ интегратор с коэффициентом K_i ,
- ✓ дифференциатор с коэффициентом K_d .

ПИД - регулятор как корректирующее устройство.

Рис. 17.2

- **Влияние K_p :** -позволяет изменить коэффициент усиления системы, тем самым уменьшить установившуюся ошибку: $e_{уст} = 1/(1+k_p k)$.
- **Влияние K_i :** -повышение порядка астатизма на 1.
- **Влияние K_d :** -не влияет на установившуюся ошибку, так как C_0 не зависит от K_d :

$$C_0 = \frac{1}{1 + K_p K + K_d p \cdot K} \Big|_{p=0} = \frac{1}{1 + K_p K}; \quad \text{при } k_i=0.$$

Увеличение K_d повышает запас устойчивости, сглаживает переходный процесс, поэтому дифференциальную составляющую называют демпфированием.

С помощью интегральной и пропорциональной составляющих можно обеспечить первый порядок астатизма и желаемую статическую точность в ущерб запасу устойчивости. А дифференциальная составляющая повышает запас устойчивости.

- **Параллельное корректирующее устройство.**

Параллельное корректирующее устройство имеет вид местной ООС. При этом (65) несправедлива. Для синтеза параллельных корректирующих устройств использовать логарифмические частотные характеристики гораздо менее удобно, чем для последовательных. Существует ряд инженерных методов расчёта параллельных корректоров (например, метод диаграмм Никольса). Также можно просто вычислять корректирующую $W_{корректора}(p)$.

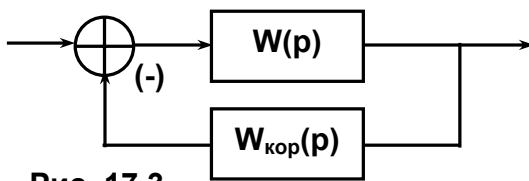


Рис. 17.3

Задаётся желаемая $W_{зс}(p)$ и надо определить требуемую $W_{корректора}(p)$. Её можно легко вычислить, однако, часто получаются нереализуемые корректоры.

$$W_{корректора}(p) = \frac{W(p) - W_{зс}^{желаемая}(p)}{W(p)W_{зс}^{желаемая}(p)} \quad |W(p)| \gg |W_{зс}^{желаемая}(p)| \approx \frac{1}{W_{зс}^{желаемая}(p)}; \quad (17.4)$$

Подобно (61) одна из двух передаточных функций $W_{корректора}(p)$ или $W_{зс}(p)$ не является (строго говоря) физически реализуемой. Тем не менее, всегда можно выбрать достаточно близкую реализуемую функцию.

- **Частотные оценки качества и синтез с помощью диаграмм Солодовникова (В.В Солодовников. Москва 1967г.).**

- ✓ Метод Солодовникова позволяет в конечном итоге построить корректирующее звено для имеющейся системы так, чтобы обеспечит требуемые типовые показатели качества: $t_{пп}$, n , $\sigma\%$, $e_{уст}$ а также обеспечить запас устойчивости по амплитуде и фазе. Метод основан на имеющейся связи между частотной характеристикой и переходной функцией:

$$H(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega; \quad (17.5)$$

В этой формуле $P(\omega)$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ) - вещественная часть АФЧХ: $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$.

В.В. Солодовников доказал, что **в любой САУ** имеются следующие зависимости между основными показателями качества переходного процесса и $P(\omega)$.

- $\sigma\% > 18\%$, если есть "горб", т.е. $P_{max} > P_0$;
- $\sigma\% < 18\%$, если нет горба;
- $\sigma\% = 0$, если производная $dP/d\omega < 0$ и монотонно убывает.

Требование монотонного убывания часто слишком жесткое, налагающее неоправданные ограничения на конструкцию. Принято обеспечивать $\sigma\% < 18\%$

Далее приводится процедура синтеза САУ с помощью диаграмм Солодовникова.

- ✓ Диаграммы Солодовникова устанавливают связь между $\sigma\%$, $t_{пп}$, P_{max} и ω_c - частотой среза системы, то есть той частотой, где усиление системы равно **1** или $L(\omega_c) = 0$.

Понятие области существенных частот.

Область существенных частот (ω_n, ω_b) - это та часть **желаемой** частотной характеристики, которая в основном определяет качество системы. Т.е. поведение частотной характеристики вне этой области уже не оказывает заметного влияния.

Диапазон ЛАЧХ: **[+26дб. ÷ -16дб.];**

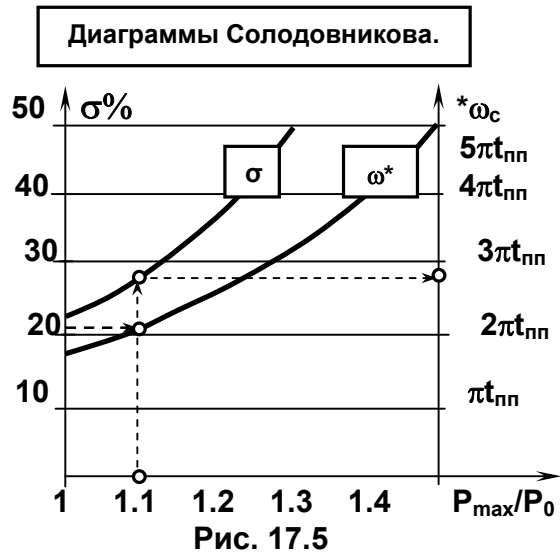
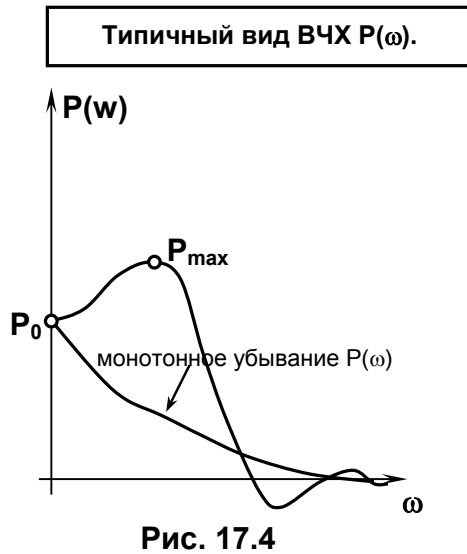
Область существенных частот.

- ✓ уровень **+26дб. соответствует усилению $K=20$ и соответствующей установившейся ошибке $e_{уст}=C_0 = 1/(1+K) \approx 0.05$,**

т.е. нижняя частота области существенных частот определяется статической точностью $e_{уст} \approx 0.05$ **при ступенчатом входном воздействии**. Левее частоты ω_n ЛАЧХ не ниже +26дб, если не требуется астатизма, либо имеет наклон в зависимости от порядка астатизма.

- ✓ уровень **-16дб. соответствует малости влияния высокочастотных составляющих переходного процесса на уровне $\approx 10\%$.**
- ✓ **наклон ЛАЧХ** в области существенных частот должен быть **-20дб./дек.**

На диаграмме Солодовникова по горизонтали отложена второстепенная величина P_{max}/P_0 , которая в настоящее время используется редко, а по вертикальным осям отложены $\sigma\%$, $t_{пп}$ и ω_c .



Использовать диаграммы Солодовникова можно по-разному. Обычно применяется такая методика. Уточняют, какие показатели качества могут быть сформулированы заказчиком, и остальные параметры, необходимые для построения корректирующего устройства, определяют по диаграммам Солодовникова. По графикам можно, например, определить **при заданном перерегулировании и времени переходного процесса частоту среза системы: $(\sigma\%, t_{пп}) \rightarrow \omega_c, n, \Delta A, \Delta\varphi$. Причём последние три параметра обеспечиваются автоматически.**

Тогда алгоритм синтеза САУ может быть, например, таким:

Исходно заданы $\sigma\%$, $t_{пп}$.

- По диаграммам определяем ω_c (точнее, выражение ω_c через $t_{пп}$).
- Строим область существенных частот, что даёт нам основную часть желаемой ЛАЧХ. Достаиваем высокочастотную часть произвольно и низкочастотную часть, исходя из требуемого порядка астатизма.
- Синтезируем последовательное корректирующее звено, обеспечивающее такую ЛАЧХ.

Использование методики Солодовникова гарантирует показатели качества замкнутой системы и запасы устойчивости по амплитуде на уровне $\Delta A\% = 200$ (коэффициент усиления может быть увеличен в два раза), и по фазе на уровне $\Delta\varphi = 35^\circ$.

- **Лекция 18.**

Случайные процессы в САУ. Линейная оптимальная фильтрация.

В реальных системах чаще всего **имеются помехи (возмущения)**, действующие в каналах передачи информации. К этому добавляется также **неточное знание некоторых параметров** системы управления. Часто не имеется никакой, кроме **статистической**, информации об этих факторах. Это заставляет считать эти параметры случайными величинами, возможно даже с заранее неизвестными законами распределения. Так возникает задача управления в условиях неопределенности, то есть теория **стохастических систем управления**. Здесь имеются два аспекта:

- ✓ управление в условиях неопределенности;
- ✓ задача фильтрации, то есть задача борьбы с помехами.

Замечание: В общую постановку задачи фильтрации входит также и рассматриваемая ниже задача наблюдения.

Модели случайных сигналов в САУ.

Случайные сигналы будем считать случайными процессами, т.е. функциями времени, принимающими случайные значения. В каждый момент времени, значение случайного процесса есть случайная величина $x(t)$. Имеются следующие характеристики этой случайной величины в момент времени t :

Реализация случайного процесса

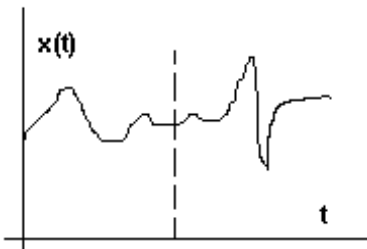


Рис. 18.1

$p(x,t)$ -плотность вероятности в момент t .

➤ **Математическое ожидание:**

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)p(x,t)dx; \quad (18.1)$$

➤ **Дисперсия:**

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) - M_x(t))^2 p(x,t)dx; \quad (18.2)$$

$M(t)$ и $D(t)$ характеризуют значение $x(t)$ в отдельные моменты времени.

Для описания **статистической взаимосвязи значений $x(t)$ в разные моменты времени вводятся:**

➤ **Корреляционная функция сигнала $x(t)$:**

$$K_x(t_1, t_2) = M[(x(t_1) - M_x(t_1))(x(t_2) - M_x(t_2))]; \quad (18.3)$$

➤ **Взаимная корреляционная функция сигналов $x(t)$ и $y(t)$:**

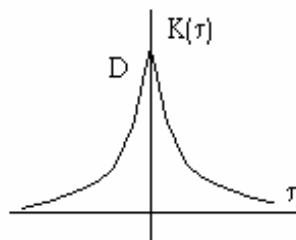
$$K_{xy}(t_1, t_2) = M[(x(t_1) - M_x(t_1))(y(t_2) - M_y(t_2))]; \quad (18.4)$$

Отметим, что $K_x(t,t) = D_x(t)$, т.е. при $t_1=t_2=t$ это есть дисперсия в момент времени t .

Стационарным случайным процессом называется такой случайный процесс, для которого корреляционная функция, на самом деле, зависит не от абсолютных значений t_1 и t_2 , а только от их разности. Это просто означает, что статистическая связь между значениями случайного процесса в различные моменты времени определяется лишь **расстоянием между этими моментами времени, но не самим значением времени**. Дисперсия и математическое ожидание для стационарного случайного процесса являются константами. Стационарный случайный процесс для САУ не меняет своих статистических характеристик за время жизни системы.

- ✓ Сразу заметим, что введённые понятия, конечно, могут быть обобщены на случай многомерных - векторных сигналов.

Типичный график корреляционной функции.



Итак, для стационарных случайных процессов:

$$K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_2) = K(\tau).$$

Для стационарного процесса математическое ожидание и дисперсия также не зависят от времени. Корреляционная функция, математическое ожидание, дисперсия могут быть определены экспериментально. Этим вопросом занимается математическая статистика.

Рис. 18.2

- ✓ Будем считать, что в САУ помехи могут быть в двух основных местах: в канале управления и в измерителе.

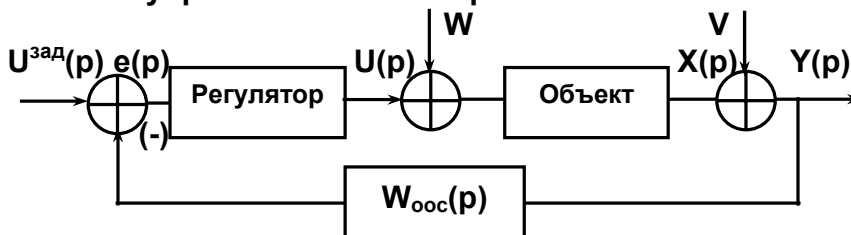


Рис. 18.3

W - помеха в канале управления. К управлению добавляется помеха.

V - помеха в канале измерения. Выходной сигнал измеряется с помехой.

- **Задача фильтрации** - максимально возможное подавление обеих помех.

Возможен также случай косвенного измерения выходного сигнала. Тогда к задаче фильтрации добавляется ещё задача наблюдения.

- **Задача наблюдения** - восстановление сигнала по результатам косвенных измерений.

В теории доказывается, что решение задачи наблюдения может быть получено в ходе решения задачи фильтрации.

Для того чтобы точнее сформулировать и решить задачу фильтрации, введём дополнительно понятие спектральной плотности случайного процесса.

- **Спектральная плотность $S(\omega)$ стационарного случайного процесса, есть интеграл (преобразование) Фурье от корреляционной функции $K(\tau)$.** Соответственно, корреляционная функция $K(\tau)$ есть

$$S(\omega) = \Phi(K(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad \text{обратное преобразование Фурье спектральной плотности } S(\omega). \quad (18.5)$$

$$K(\tau) = \Phi^{-1}(S(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \quad \text{Спектральная плотность случайного процесса описывает разложение мощности процесса по гармоническим составляющим.}$$

Уже известно (18.2-4), что дисперсия стационарного случайного процесса равна значению корреляционной функции в 0: $D=K(0)$. Поэтому можно выразить дисперсию через интеграл от спектральной плотности, это фактически означает, что дисперсия есть суммарная мощность случайного процесса, распределённая по частоте.

$$D=K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega; \quad (18.6)$$

Дисперсия имеет размерность (и смысл) квадрата случайной величины. По этой причине рассматривается величина $R = \sqrt{D}$ — интенсивность, или среднеквадратическое значение (отклонение).

- **R имеет размерность самой величины и смысл среднего разброса случайной величины вокруг математического ожидания M .**

Чтобы интеграл (18.6) был сходящимся, надо, чтобы спектральная плотность убывала с увеличением частоты ω достаточно быстро.

Аналогично можно дать определение взаимной спектральной плотности двух процессов $x(t)$ и $y(t)$, выраженной через взаимную корреляционную функцию $K_{xy}(\tau)$:

$$S_{xy}(\omega) = \Phi(K_{xy}(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad (18.7)$$

Если рассмотреть сигнал с бесконечным равномерным спектром, то ему будет соответствовать корреляционная функция в виде δ -функции:

$$S(\omega) = N = \text{const}; \quad K(\tau) = N/2\pi \cdot \delta(\tau); \quad D = K(0) = \infty. \quad (18.8)$$

Эти три уравнения описывают “белый шум” с интенсивностью N . Ясно, что такой сигнал не может быть физически реализован в силу бесконечной мощности, однако, имеет привлекательное свойство - его значения в разные моменты времени совершенно не связаны между собой. Как бы в каждый момент времени имеется независимая случайная величина. Цена этой абстракции - нереализуемость такого процесса.

Можно, однако, реализовать сколь угодно близкий к этому случайный процесс, называемый “розовым шумом”. Формально розовый шум получается при пропускании белого шума через любое реальное звено. При этом ограничивается спектр сигнала, так как никакое реальное звено не может пропускать бесконечную полосу частот. В результате, у реального

розового шума может быть сколь угодно широкий, но неизбежно убывающий спектр, а его корреляционная функция может очень быстро убывать, что означает малую связь значений процесса в разные моменты времени.

Связь между скоростями убывания корреляционной функции и спектра.

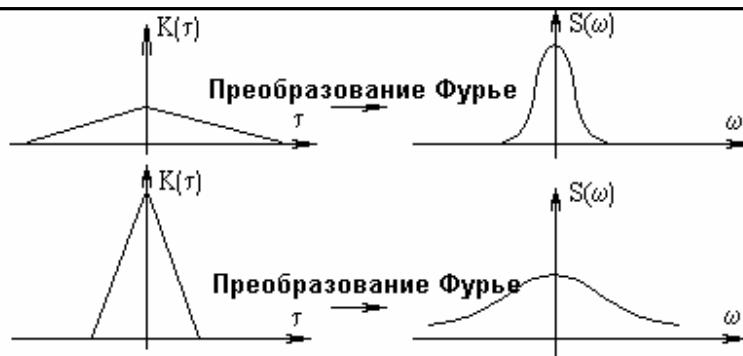


Рис. 18.4

- ✓ Ясно, что этот белый шум является очень тяжелой помехой. Если уметь бороться с такой помехой, "с остальными помехами должно быть проще".

В общем случае, при прохождении некоторого блока с передаточной функцией $W(p)$ спектральная функция преобразуется так:

$$\begin{array}{c} S_u(\omega) \longrightarrow \boxed{W(p)} \longrightarrow S_y(\omega) \\ \text{Рис. 18.5} \end{array} \quad S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 * S_u(\omega); \quad (18.9)$$

В частном случае для белого шума с единой спектральной плотностью:

$$\begin{array}{c} S_u(\omega) = 1 \longrightarrow \boxed{W(p)} \longrightarrow |W(j\omega)|^2 \\ \text{Рис. 18.6} \end{array} \quad S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2; \quad (18.10)$$

Такой блок называют "формирователем". При заданной спектральной плотности выходного сигнала легко можно вычислить передаточную функцию "формирующего фильтра", который выработает необходимый спектр из стандартного (единичного) белого шума:

$$S(\omega) = |W(j\omega)|^2 = W(j\omega) \cdot W(-j\omega) = \Psi(j\omega) \cdot \Psi(-j\omega) - \text{процедура факторизации } S(\omega).$$

- ✓ Спектральная плотность вещественного сигнала всегда является чётной функцией, поэтому допускает такую факторизацию.
- ✓ Белый шум, прошедший через линейную систему, является розовым.

Также имеется простая связь между взаимными спектральной плотностью входного и выходного сигналов и спектральной плотностью входного сигнала:

$$\begin{array}{c} S_u(\omega) \longrightarrow \boxed{W(p)} \longrightarrow S_{uy}(\omega) \\ \text{Рис. 18.7} \end{array} \quad S_{uy}(\omega) = W(j\omega) * S_u(\omega); \quad (18.11)$$

Рис. 18.7

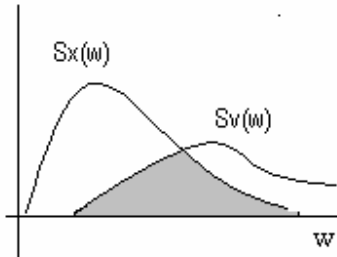
Фильтрация помех.

Теперь перейдём собственно к постановке и решению задачи фильтрации, понимаемой нами, как задача борьбы с помехами в САУ. Будем при этом решать задачу как оптимальную, то есть искать условия наибольшего подавления помех. Помехи

будем считать случайными процессами с известными корреляционными функциями или (что эквивалентно) с известными спектральными характеристиками.

• **Фильтр Винера (Норберт Винер).**

Задача - построить устройство-фильтр в виде передаточной функции, максимально подавляющее **аддитивную** случайную помеху. При этом полезный сигнал также считается случайным процессом. Возможность эффективной фильтрации за-



висит от того, как перекрываются спектры полезного сигнала и помехи, но не только от этого. Важна ещё и степень статистической связи между ними, которая описывается взаимной спектральной плотностью или взаимной корреляционной функцией.

Рис. 18.8

Предполагаются известными:

- спектральная плотность полезного сигнала $S_x(\omega)$, а также их взаимная спектральная плотность $S_{xv}(\omega)$, либо, что эквивалентно:
- соответствующие корреляционные функции $K_x(\tau)$, $K_{xv}(\tau)$.

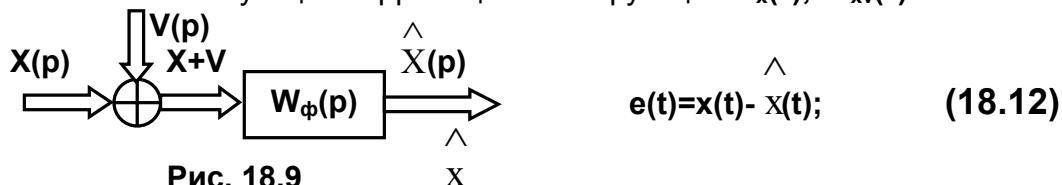


Рис. 18.9

Случайный процесс $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ называется **ошибкой фильтрации**. Его "малость" могла бы означать хорошее качество фильтрации, однако, для случайной величины понятие "малость" не имеет обычного смысла. Вместо этого используют малость дисперсии D_e , как меры мощности сигнала $e(t)$.

- Оптимальная передаточная функция фильтра ищется из условия:

$$D_e \rightarrow \min. \tag{18.13}$$

- ✓ Отметим, что важным предположением является стационарность случайных сигналов и отсутствие дополнительной информации о сигналах, при наличии которой фильтрацию можно было бы улучшить.

Имеются формулы, позволяющие получить передаточную функцию оптимального фильтра Винера, наилучшим образом решающую задачу:

$$W_\phi(p) = \frac{K^+(p)}{\Psi(p)}; \text{ где } S_x(\omega) = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega); K(j\omega) = \frac{S_{xv}(\omega)}{\Psi(-j\omega)}; K(p) = K^+(p) + K^-(p); \tag{18.14}$$

здесь: $K^+(p)$ - устойчивые элементарные дроби в разложении $K(p)$.

Рассмотренный фильтр Винера описывает процедуру стационарной фильтрации при стационарных случайных процессах. При этом не учитываются, например, переходные процессы при заданном начальном состоянии системы. Фильтр Винера может быть обобщён на более сложные случаи (многомерных сигналов, нестационарных процессов и т.п.), но наиболее полным образом теория и задача линейной фильтрации реализуется в так называемом **фильтре Калмана**, то есть в многомерном, нестационарном линейном оптимальном фильтре в пространстве состояний.

- ✓ Конечно, фильтр Винера оказывается частным случаем фильтра Калмана, именно - установившимся режимом фильтра Калмана при стационарных помехах, представленным в виде передаточной функции.

- **Фильтр Калмана (Ричард Калман 1961г.).**

Постановка задачи: Имеется многомерная нестационарная линейная система, в которой имеются **помехи W – в канале управления и V – в канале измерения**. Кроме того косвенно

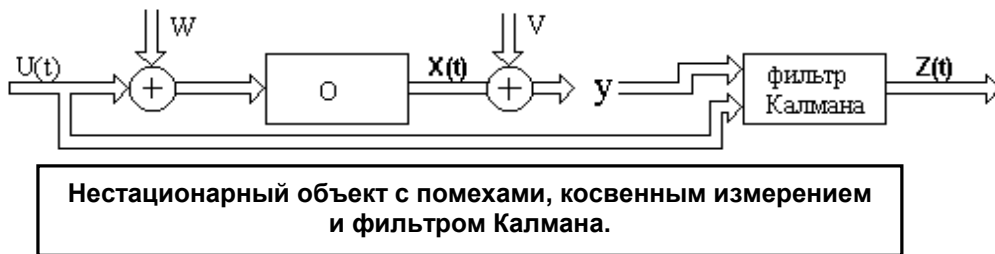


Рис. 18.10

Пусть известны, возможно, нестационарные уравнения объекта (82). Здесь матрицы уравнений из-за нестационарности могут зависеть от времени. Имеются помехи w и v и косвенное измерение $y(t)$ состояния $x(t)$ объекта.

$$\begin{cases} \bullet \\ x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w; & \text{-уравнение состояния объекта.} \\ y(t) = C(t)x(t) + v; & \text{-уравнение косвенного измерения состояния.} \end{cases} \quad (18.15)$$

Будем строить фильтр, как динамическую систему аналогичного (82) вида относительно сигнала **оценки состояния $z(t)$** :

$$\bullet \quad z(t) = F(t)x(t) + B(t)u(t) + K(t)y(t); \quad \text{-уравнение оценки состояния.} \quad (18.16)$$

Матрицы $F(t)$ и $K(t)$ подлежат определению. Матрица $B(t)$ выбрана из условия **компенсации управляющего воздействия**. В самом деле, при такой матрице сигнал ошибки не будет явно зависеть от управления (87), то есть **разделяются задачи управления и фильтрации (фильтрация не зависит от управления)**.

Требуем при этом минимальной дисперсии ошибки фильтрации в каждый момент времени: $e(t) = x(t) - z(t); \quad D_e(t) \rightarrow \min. \quad (18.17)$

Предположим, что V и W (помехи) являются "белыми шумами" с нулевым математическим ожиданием, с заданными интенсивностями - дисперсиями и независимы между собой. Используя оптимизационный подход, определим **оптимальные матрицы $F(t)$ и $K(t)$** . Вычисления показывают, что

$$F(t) = A(t) - K_{\text{опт}}(t) \cdot C, \quad \text{а } K_{\text{опт}}(t) = P(t)C^T R^{-1}(t). \quad (18.19)$$

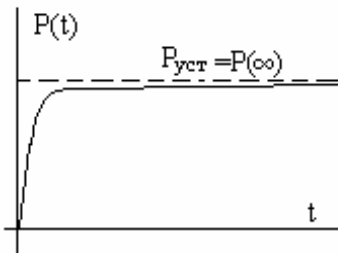
Здесь $P(t)$ - ковариационная матрица ошибки $e(t)$, являющаяся обобщением меняющейся со временем дисперсии нестационарного случайного процесса на векторный случай. $R^{-1}(t)$ - матрица, обратная матрице интенсивности случайного процесса $V(t)$, являющейся обобщением интенсивности на случай векторного белого шума. Матрица $P(t)$ при этом удовлетворяет следующему матричному дифференциальному уравнению Риккати:

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T R^{-1} C P(t) + Q; \quad (18.20)$$

Q - интенсивность шума w .

Вообще говоря, это уравнение необходимо решать на компьютере и хранить в памяти, чтобы можно было вычислять оптимальный коэффициент усиления $K_{\text{опт}}(t)$ фильтра по формуле (85).

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{z}(t) = (A(t) - K_{\text{опт}}(t) \cdot C) e(t) + w - K_{\text{опт}}(t) v; \quad (18.21)$$



Таким образом, оптимальный фильтр Калмана, даже при постоянных параметрах объекта, является системой с переменными коэффициентами. Поэтому, его затруднительно реализовать. Однако, $P(t)$ обычно быстро стремится к установившемуся значению и квазиоптимальный фильтр получается из оптимального, если мы выбираем $K_{\text{опт}} = K_{\text{уст}}$ из условия: $dP_{\text{уст}}/dt = 0$, что приводит к алгебраическому матричному

Рис. 18.11 уравнение для $P_{\text{уст}}$. Фильтр

Винера как раз соответствует стационарному установившемуся режиму работы фильтра Калмана.

- ✓ Одновременно с задачей фильтрации автоматически решается задача восстановления состояния объекта по косвенным измерениям.

Приведём, наконец, важнейшую теорему, которая устанавливает тот факт, что алгоритмы управления и фильтрации могут быть реализованы по-отдельности и их одновременное функционирование в замкнутой системе не мешает друг другу.

- Теорема разделения в задаче фильтрации.

Оптимальный фильтр можно рассчитывать отдельно от регулятора в том смысле, что характеристическое уравнение замкнутой системы оказывается равным произведению:

$$P_{\text{зс}}(p) = P(p)_{\text{подсистемы регулирования}} \cdot P(p)_{\text{подсистемы фильтрации}}; \quad (18.22)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А.А. Алексеев, Д.Х.Имаев, Н.Н. Кузьмин, В.Б. Яковлев Теория управления. СПбГ.; Издательство "ЛЭТИ" 1999, 434с.
2. Р.Дорф, Р.Бишоп. Современные системы управления. М.:Юнимедиастилл 2002, 822с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. Введение.	3
ЛЕКЦИЯ 2. Математические модели САУ. Уравнение объекта.	10
ЛЕКЦИЯ 3. Положения, лежащие в основе линеаризации.	13
ЛЕКЦИЯ 4. Метод преобразования Лапласа	17
ЛЕКЦИЯ 5. Типовые входные воздействия.	19
ЛЕКЦИЯ 6. Передаточная матрица для системы дифференциальных уравнений.	22
ЛЕКЦИЯ 7. Характеристики типовых звеньев ТАУ.	26
ЛЕКЦИЯ 8. Характеристики типовых звеньев ТАУ (продолжение).	30
ЛЕКЦИЯ 9. Колебательное звено	35
ЛЕКЦИЯ 10. Правила преобразования структурных схем	40
ЛЕКЦИЯ 11. Многомерные САУ со многими входами и выходами.	46
ЛЕКЦИЯ 12. Устойчивость систем автоматического управления	49
ЛЕКЦИЯ 13. Частотные методы исследования устойчивости.	53
ЛЕКЦИЯ 14. Понятие запаса устойчивости по амплитуде и фазе.	57
ЛЕКЦИЯ 15. Точность САУ.	60
ЛЕКЦИЯ 16. Точность по возмущающему воздействию.	66
ЛЕКЦИЯ 17. Синтез САУ.	69
ЛЕКЦИЯ 18. Случайные процессы в САУ. Линейная оптимальная фильтрация.	74
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	81